Une approche en géométrie réelle pour périodes de Kontsevich-Zagier

Juan Viu-Sos

Institut Fourier (U. Grenoble-Alpes)

13 janvier, 2017

Contents

Qu'est-ce qu'une "période" ?

- Soit X une variété lisse et Y une subvar. fermée de X, définies sur $\mathbb{Q}$. Cohomologies
  - de Betti : $H^\bullet_{\mathrm{B}}(X, Y; \mathbb{Q})$
  - algébrique de de Rham: $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X, Y; \mathbb{Q})$

Qu'est-ce qu'une "période" ?

- Soit X une variété lisse et Y une subvar. fermée de X, définies sur $\mathbb{Q}$. Cohomologies
  - de Betti : $H^\bullet_{\mathrm{B}}(X, Y; \mathbb{Q})$
  - algébrique de de Rham: $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X, Y; \mathbb{Q})$
- "Pairing" par intégration :

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet_{\mathrm{B}}(X, Y; \mathbb{Q}) \times H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X, Y; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\gamma, \omega) & \longmapsto & \int_{\gamma^*} \omega \end{array}$$

Qu'est-ce qu'une "période" ?

- Soit X une variété lisse et Y une subvar. fermée de X, définies sur $\mathbb{Q}$. Cohomologies
  - de Betti : $H_{\mathrm{B}}^{\bullet}(X, Y; \mathbb{Q})$
  - algébrique de de Rham: $H_{\mathrm{dR}}^{\bullet}(X, Y; \mathbb{Q})$
- "Pairing" par intégration :

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{B}}^{\bullet}(X, Y; \mathbb{Q}) \times H_{\mathrm{dR}}^{\bullet}(X, Y; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\gamma, \omega) & \longmapsto & \int_{\gamma^*} \omega \end{array}$$

- En tensorisant par $\mathbb{C} \rightsquigarrow$ l'*isomorphisme de comparaison*

$$\mathrm{comp}_{\mathrm{B,dR}} : H_{\mathrm{dR}}^{\bullet}(X, Y; \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} H_{\mathrm{B}}^{\bullet}(X, Y; \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$$

représenté en utilisant $\mathbb{Q}$–bases par la *matrice des périodes*

$$\Pi = \left(\int_{\gamma_i^*} \omega_j \right)_{i,j=1,\ldots,s} .$$

Qu'est-ce qu'une "période" ?

- Soit X une variété lisse et Y une subvar. fermée de X, définies sur $\mathbb{Q}$. Cohomologies
  - de Betti : $H^\bullet_{\mathrm{B}}(X, Y; \mathbb{Q})$
  - algébrique de de Rham: $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X, Y; \mathbb{Q})$
- "Pairing" par intégration :

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet_{\mathrm{B}}(X, Y; \mathbb{Q}) \times H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X, Y; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\gamma, \omega) & \longmapsto & \int_{\gamma^*} \omega \end{array}$$

- En tensorisant par $\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ l'*isomorphisme de comparaison*

$$\mathrm{comp}_{\mathrm{B,dR}} : H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X, Y; \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} H^\bullet_{\mathrm{B}}(X, Y; \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$$

représenté en utilisant $\mathbb{Q}$–bases par la *matrice des périodes*

$$\Pi = \left(\int_{\gamma_i^*} \omega_j \right)_{i,j=1,\ldots,s} .$$

Qu'est-ce qu'une "période" ?

- QUESTION: Est-ce que l'isomorphisme de comparaison est induit par $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X, Y; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet_{\mathrm{B}}(X, Y; \mathbb{Q})$?
  - NON! Si $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$, $Y = \emptyset$ et $\gamma = S^1 \subset \mathbb{C}^*$:

    $$H^\bullet_{\mathrm{B}}(\mathbb{C}^*; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\gamma^*, \quad H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

    mais $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\pi i \notin \mathbb{Q}$.

Qu'est-ce qu'une "période" ?

- QUESTION: Est-ce que l'isomorphisme de comparaison est induit par $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X,Y;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet_{\mathrm{B}}(X,Y;\mathbb{Q})$?
  - NON! Si $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\} = \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[t,t^{-1}]$, $Y=\emptyset$ et $\gamma = S^1 \subset \mathbb{C}^*$:

$$H^\bullet_{\mathrm{B}}(\mathbb{C}^*;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\gamma^*, \quad H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

mais $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\pi i \notin \mathbb{Q}$.

$$\wr$$

Obstruction "transcendante", invariante de la paire (X,Y) !

Qu'est-ce qu'une "période" ?

- QUESTION: Est-ce que l'isomorphisme de comparaison est induit par $H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(X, Y; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^{\bullet}_{\mathrm{B}}(X, Y; \mathbb{Q})$?
  - NON! Si $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$, $Y = \emptyset$ et $\gamma = S^1 \subset \mathbb{C}^*$:

$$H^{\bullet}_{\mathrm{B}}(\mathbb{C}^*; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\gamma^*, \quad H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(X; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

mais $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\pi i \notin \mathbb{Q}$.

$$\rightsquigarrow$$

Obstruction "transcendante", invariante de la paire (X, Y) !

- QUESTION: Quels sont les relations algébriques entre périodes de (X, Y) ?

Qu'est-ce qu'une "période" ?

- QUESTION: Est-ce que l'isomorphisme de comparaison est induit par $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X,Y;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet_{\mathrm{B}}(X,Y;\mathbb{Q})$?
  - NON! Si $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\} = \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[t,t^{-1}]$, $Y = \emptyset$ et $\gamma = S^1 \subset \mathbb{C}^*$:

$$H^\bullet_{\mathrm{B}}(\mathbb{C}^*;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\gamma^*, \quad H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

mais $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\pi i \notin \mathbb{Q}$.

$$\wr$$

Obstruction "transcendante", invariante de la paire (X,Y) !

- QUESTION: Quels sont les relations algébriques entre périodes de (X,Y) ?

Conjecture (Grothendieck '66)

"Toute relation polynomiale entre périodes de X proviens de relations entre cycles algébriques de X."

Qu'est-ce qu'une "période" ?

- QUESTION: Est-ce que l'isomorphisme de comparaison est induit par $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X,Y;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet_{\mathrm{B}}(X,Y;\mathbb{Q})$?
  - NON! Si $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[t,t^{-1}]$, $Y = \emptyset$ et $\gamma = S^1 \subset \mathbb{C}^*$:

$$H^\bullet_{\mathrm{B}}(\mathbb{C}^*;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\gamma^*, \quad H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

mais $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\pi i \notin \mathbb{Q}$.

$$\rightsquigarrow$$

Obstruction "transcendante", invariante de la paire (X,Y) !

- QUESTION: Quels sont les relations algébriques entre périodes de (X,Y) ?

Conjecture (Grothendieck '66)

"Toute relation polynomiale entre périodes de X proviens de relations entre cycles algébriques de X."

Qu'est-ce qu'une "période" ?

M. Kontsevich and D. Zagier. PERIODS, *Mathematics unlimited–2001 and beyond*, 2001.

Soit $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ le corps des nombres algébriques RÉELS.

Qu'est-ce qu'une "période" ?

M. Kontsevich and D. Zagier. PERIODS, *Mathematics unlimited–2001 and beyond*, 2001.

Soit $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ le corps des nombres algébriques RÉELS.

Définition

Une *période de Kontsevich-Zagier* (ou *période effective*) est tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(p)$ et $\Im(p)$ sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de la forme

$$\mathcal{I}(S, P/Q) = \int_S \frac{P(x_1, \ldots, x_d)}{Q(x_1, \ldots, x_d)} \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_d$$

où $S \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble $\mathbb{R}_{\text{alg}}$-semi-algébrique et $P/Q \in \mathbb{R}_{\text{alg}}(x_1, \ldots, x_d)$.

Qu'est-ce qu'une "période" ?

M. Kontsevich and D. Zagier. PERIODS, *Mathematics unlimited–2001 and beyond*, 2001.

Soit $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ le corps des nombres algébriques RÉELS.

Définition

Une *période de Kontsevich-Zagier* (ou *période effective*) est tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(p)$ et $\Im(p)$ sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de la forme

$$\mathcal{I}(S, P/Q) = \int_S \frac{P(x_1, \ldots, x_d)}{Q(x_1, \ldots, x_d)} \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_d$$

où $S \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$-semi-algébrique et $P/Q \in \mathbb{R}_{\mathrm{alg}}(x_1, \ldots, x_d)$.

$\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}} \equiv$ ensemble de périodes de Kontsevich-Zagier et $\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}} \cap \mathbb{R}$.

Qu'est-ce qu'une "période" ?

M. Kontsevich and D. Zagier. PERIODS, *Mathematics unlimited–2001 and beyond*, 2001.

Soit $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ le corps des nombres algébriques RÉELS.

Définition

Une *période de Kontsevich-Zagier* (ou *période effective*) est tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(p)$ et $\Im(p)$ sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de la forme

$$\mathcal{I}(S, P/Q) = \int_S \frac{P(x_1, \ldots, x_d)}{Q(x_1, \ldots, x_d)} \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_d$$

où $S \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble $\mathbb{R}_{\text{alg}}$-semi-algébrique et $P/Q \in \mathbb{R}_{\text{alg}}(x_1, \ldots, x_d)$.

$\mathcal{P}_{\text{KZ}} \equiv$ ensemble de périodes de Kontsevich-Zagier et $\mathcal{P}_{\text{KZ}}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P}_{\text{KZ}} \cap \mathbb{R}$.

Exemples de nombres dans $\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$

1. Nombres algébriques : $\alpha = \int_0^\alpha \mathrm{d}x$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$.
2. Comme premier nombre transcendant

$$\pi = \int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}x$$

Exemples de nombres dans $\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$

1. Nombres algébriques : $\alpha = \int_0^\alpha \mathrm{d}x$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$.
2. Comme premier nombre transcendant

$$\pi = \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}x$$

3. Logarithmes de nombres algébriques : si $\alpha \in \mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ tel que $\alpha > 1$,

$$\log(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{\left\{\substack{1<x<\alpha \\ 0<xy<1}\right\}} 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Exemples de nombres dans $\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$

1. Nombres algébriques : $\alpha = \int_0^\alpha \mathrm{d}x, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_{\text{alg}}$.
2. Comme premier nombre transcendant
$$\pi = \int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}x$$
3. Logarithmes de nombres algébriques : si $\alpha \in \mathbb{R}_{\text{alg}}$ tel que $\alpha > 1$,
$$\log(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{\left\{\substack{1<x<\alpha \\ 0<xy<1}\right\}} 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
4. Valeurs poly-zêtas, intégrales elliptiques, $\Gamma(p/q)^q$, intégrales de Feynman,...

Exemples de nombres dans $\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$

1. Nombres algébriques : $\alpha = \int_0^\alpha \mathrm{d}x,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$.
2. Comme premier nombre transcendant
$$\pi = \int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} 1\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$
3. Logarithmes de nombres algébriques : si $\alpha \in \mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ tel que $\alpha > 1$,
$$\log(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{\left\{\substack{1<x<\alpha \\ 0<xy<1}\right\}} 1\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
4. Valeurs poly-zêtas, intégrales elliptiques, $\Gamma(p/q)^q$, intégrales de Feynman,. . .

Diagramme étendue anneaux arithmétiques :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{R}_{\mathrm{alg}} & \subset & \overline{\mathbb{Q}} \\
 & & & & \cap & & \cap \\
 & & & & \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}^{\mathbb{R}} & \subset & \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}} \\
 & & & & \cap & & \cap \\
 & & & & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C}
\end{array}$$

Théorème

$\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$ est une $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbre dénombrable.

Diagramme étendue anneaux arithmétiques :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{R}_{\mathsf{alg}} & \subset & \overline{\mathbb{Q}} \\
 & & & & \cap & & \cap \\
 & & & & \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}^{\mathbb{R}} & \subset & \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}} \\
 & & & & \cap & & \cap \\
 & & & & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C}
\end{array}$$

Théorème

$\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$ est une $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbre dénombrable.

CONJECTURALEMENT: e, $1/\pi$ ou nombres de Liouville ne sont pas dans $\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$.

Diagramme étendue anneaux arithmétiques :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{R}_{\text{alg}} & \subset & \overline{\mathbb{Q}} \\
 & & & & \cap & & \cap \\
 & & & & \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}^{\mathbb{R}} & \subset & \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}} \\
 & & & & \cap & & \cap \\
 & & & & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C}
\end{array}$$

Théorème

$\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$ est une $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbre dénombrable.

CONJECTURALEMENT: e, $1/\pi$ ou nombres de Liouville ne sont pas dans $\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$.

YOSHINAGA('08): $\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}_{(\text{Elem})} \rightsquigarrow$ construction de $\alpha \notin \mathbb{R}_{(\text{Elem})}$.

Diagramme étendue anneaux arithmétiques :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{R}_{\mathsf{alg}} & \subset & \overline{\mathbb{Q}} \\ & & & & \cap & & \cap \\ & & & & \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}^{\mathbb{R}} & \subset & \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}} \\ & & & & \cap & & \cap \\ & & & & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C} \end{array}$$

Théorème

$\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$ est une $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbre dénombrable.

CONJECTURALEMENT: e, $1/\pi$ ou nombres de Liouville ne sont pas dans $\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$.

YOSHINAGA('08): $\mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}_{(\mathsf{Elem})} \rightsquigarrow$ construction de $\alpha \notin \mathbb{R}_{(\mathsf{Elem})}$.

Problèmes ouverts et conjectures

Conjecture (de périodes de Konsevich-Zagier)

Si une période réelle admet deux représentations intégrales, alors on peut passer d'une formulation à l'autre en utilisant uniquement trois opérations (appelés KZ–règles) :

Problèmes ouverts et conjectures

Conjecture (de périodes de Konsevich-Zagier)

Si une période réelle admet deux représentations intégrales, alors on peut passer d'une formulation à l'autre en utilisant uniquement trois opérations (appelés KZ–règles) :

- $\int_{S_1 \sqcup S_2} \omega = \int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega$ *et* $\int_S \omega_1 + \omega_2 = \int_S \omega_1 + \int_S \omega_2$

Problèmes ouverts et conjectures

Conjecture (de périodes de Konsevich-Zagier)

Si une période réelle admet deux représentations intégrales, alors on peut passer d'une formulation à l'autre en utilisant uniquement trois opérations (appelés KZ–règles) :

- $\displaystyle\int_{S_1 \sqcup S_2} \omega = \int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega$ *et* $\displaystyle\int_S \omega_1 + \omega_2 = \int_S \omega_1 + \int_S \omega_2$
- $\displaystyle\int_S \omega = \int_{h^{-1}S} h^* \omega$

Problèmes ouverts et conjectures

Conjecture (de périodes de Konsevich-Zagier)

Si une période réelle admet deux représentations intégrales, alors on peut passer d'une formulation à l'autre en utilisant uniquement trois opérations (appelés KZ–règles) :

- $\displaystyle\int_{S_1 \sqcup S_2} \omega = \int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega \quad \textit{et} \quad \int_S \omega_1 + \omega_2 = \int_S \omega_1 + \int_S \omega_2$
- $\displaystyle\int_S \omega = \int_{h^{-1}S} h^* \omega$
- $\displaystyle\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$ *(formule de Stokes)*

En plus, ces opérations doivent respecter la classe des objets précédentes.

Problèmes ouverts et conjectures

Conjecture (de périodes de Konsevich-Zagier)

Si une période réelle admet deux représentations intégrales, alors on peut passer d'une formulation à l'autre en utilisant uniquement trois opérations (appelés KZ–règles) :

- $\displaystyle\int_{S_1 \sqcup S_2} \omega = \int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega$ *et* $\displaystyle\int_S \omega_1 + \omega_2 = \int_S \omega_1 + \int_S \omega_2$
- $\displaystyle\int_S \omega = \int_{h^{-1}S} h^* \omega$
- $\displaystyle\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$ *(formule de Stokes)*

En plus, ces opérations doivent respecter la classe des objets précédentes.

Problème (Algorithme d'égalité)

Trouver un algorithme qui nous permets de prouver si deux périodes sont égales ou non.

Problèmes ouverts et conjectures

Conjecture (de périodes de Konsevich-Zagier)

Si une période réelle admet deux représentations intégrales, alors on peut passer d'une formulation à l'autre en utilisant uniquement trois opérations (appelés KZ–règles) :

- $\displaystyle\int_{S_1 \sqcup S_2} \omega = \int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega$ *et* $\displaystyle\int_S \omega_1 + \omega_2 = \int_S \omega_1 + \int_S \omega_2$
- $\displaystyle\int_S \omega = \int_{h^{-1}S} h^* \omega$
- $\displaystyle\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$ *(formule de Stokes)*

En plus, ces opérations doivent respecter la classe des objets précédentes.

Problème (Algorithme d'égalité)

Trouver un algorithme qui nous permets de prouver si deux périodes sont égales ou non.

UNE REDUCTION SEMI-CANONIQUE POUR PÉRIODES

"A semi-canonical reduction for periods of Kontsevich-Zagier.", arXiv:1509.01097. (soumis)

Approche géométrie : une stratégie

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Approche géométrie : une stratégie

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\downarrow$$

$$\int_K 1\,\mathrm{d}x$$

Approche géométrie : une stratégie

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow$$

$$\int_K 1\,\mathrm{d}x$$

Toute la complexité
sur le DOMAINE

Approche géométrie : une stratégie

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\downarrow$$

$$\int_K 1\,\mathrm{d}x$$

COMPACTE

Toute la complexité
sur le DOMAINE

Approche géométrie : une stratégie

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow \quad \bullet \text{ algorithmique}$$

$$\int_K 1\,\mathrm{d}x$$

COMPACTE

Toute la complexité
sur le DOMAINE

Approche géométrie : une stratégie

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\, \mathrm{d}x$$

- algorithmique
- respectant les régles-KZ

$$\int_K 1\, \mathrm{d}x$$

COMPACTE

Toute la complexité
sur le DOMAINE

Approche géométrie : une stratégie

$$\begin{tikzcd} \displaystyle\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[rr, bend left, "\text{travaux d'Ayoub}"] \arrow[d] & & \displaystyle\int_{[0,1]^d} f(z)\,\mathrm{d}z \\ \displaystyle\int_K 1\,\mathrm{d}x & & \end{tikzcd}$$

- algorithmique
- respectant les régles-KZ

Toute la complexité sur L'INTÉGRANDE

COMPACTE

Toute la complexité sur le DOMAINE

Approche géométrie : une stratégie

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

travaux d'Ayoub

HOLOMORPHE

$$\int_{[0,1]^d} f(z)\,\mathrm{d}z$$

- algorithmique
- respectant les régles-KZ

Toute la complexité
sur L'INTÉGRANDE

$$\int_K 1\,\mathrm{d}x$$

COMPACTE

Toute la complexité
sur le DOMAINE

Notre résultat principaux :

Théorème (Réduction semi-canonique)

Soit $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$ une période réelle non nulle exprimée par une forme intégrale $\mathcal{I}(S, P/Q)$ dans $\mathbb{R}^d$. Alors, il existe un algorithme effectif respectant les règles-KZ et tel que $\mathcal{I}(S, P/Q)$ peut être exprimée comme

$$p = \operatorname{sgn}(p) \cdot \mathrm{vol}_{d+1}(K),$$

où $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ est un semi-algébrique compacte.

Notre résultat principaux :

Théorème (Réduction semi-canonique)

Soit $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$ une période réelle non nulle exprimée par une forme intégrale $\mathcal{I}(S, P/Q)$ dans $\mathbb{R}^d$. Alors, il existe un algorithme effectif respectant les règles-KZ et tel que $\mathcal{I}(S, P/Q)$ peut être exprimée comme

$$p = \operatorname{sgn}(p) \cdot \operatorname{vol}_{d+1}(K),$$

où $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ est un semi-algébrique compacte.

Approche géométrique : compactification de domaines

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

$\downarrow$

- algorithmique
- respectant les régles-KZ

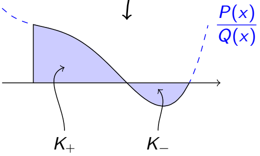
$$\int_K 1\,\mathrm{d}x$$

COMPACTE

Toute la complexité sur le DOMAINE

Approche géométrique : compactification de domaines

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$



- algorithmique
- respectant les régles-KZ

$$\int_K 1\,\mathrm{d}x$$

COMPACTE

Approche géométrique : compactification de domaines

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{compatification projective}} \sum_i \int_{K_i} \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_K 1\,\mathrm{d}x$$

- algorithmique
- respectant les régles-KZ

COMPACTE

Compactification

Définissons la *clôture projective* d'un semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^d$ étant la clôture topologique de l'inclusion $S \hookrightarrow \mathbb{P}^d_{\mathbb{R}}$.

Théorème

L'espace $\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}}$ peut-être construit comme le recollement de $C_1, \ldots, C_{d+1}$ hypercubes unité affines, recollant par des faces opposées, et tel que la clôture de Zariski de $\bigcup_{i,j=0}^{d}(C_i \cap \ C_j)$ est l'arrangement d'hyperplans

$$\mathcal{A} = \{x_i^2 - x_j^2 = 0 \mid 0 \leq i < j \leq d\} \subset \mathbb{P}^d_{\mathbb{R}}$$

$\rightsquigarrow S \longrightarrow K_1 \sqcup \ldots \sqcup K_{d+1}$ semi-algébriques compactes affines (avec intersections de mesure nulle).

Compactification

Définissons la *clôture projective* d'un semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^d$ étant la clôture topologique de l'inclusion $S \hookrightarrow \mathbb{P}^d_{\mathbb{R}}$.

Théorème

L'espace $\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}}$ peut-être construit comme le recollement de $C_1, \ldots, C_{d+1}$ hypercubes unité affines, recollant par des faces opposées, et tel que la clôture de Zariski de $\bigcup_{i,j=0}^{d}(C_i \cap C_j)$ est l'arrangement d'hyperplans

$$\mathcal{A} = \{x_i^2 - x_j^2 = 0 \mid 0 \leq i < j \leq d\} \subset \mathbb{P}^d_{\mathbb{R}}$$

$\rightsquigarrow S \longrightarrow K_1 \sqcup \ldots \sqcup K_{d+1}$ semi-algébriques compactes affines (avec intersections de mesure nulle).

Approche géométrique : résolution des pôles

$$\sum_i \int_{K_i} \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}\, \mathrm{d}x \xleftarrow{\text{compatification projective}} \int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\, \mathrm{d}x$$

- algorithmique
- respectant les régles-KZ

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\, \mathrm{d}x \longrightarrow \int_K 1\, \mathrm{d}x$$

COMPACTE

Approche géométrique : résolution des pôles

$$\begin{tikzcd}
\sum_i \int_{K_i} \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[d, "\text{résolution des pôles}"] & \int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[l, bend right, "\text{compatification projective}"'] \arrow[dd, "\begin{array}{l}\bullet\ \text{algorithmique}\\ \bullet\ \text{respectant les régles-KZ}\end{array}"] \\
\sum_{i,j} \int_{K_{i,j}} \frac{\widetilde{P}_{i,j}(x)}{\widetilde{Q}_{i,j}(x)}\,\mathrm{d}x & \\
\text{COMPACTE} \arrow[r, bend right] & \int_K 1\,\mathrm{d}x
\end{tikzcd}$$

Proposition (Belkale-Brosnan, Critère géométrique de convergence)

Une intégrale $\int_K \omega$ sur K semi-algébrique compacte est absolument convergente sii $\exists$ suite finie d'éclatements $\pi = \pi_r \circ \cdots \circ \pi_1 : W \to \mathbb{R}^d$ sur des centres lisses où :

- *W est une sous-var. fermée de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$ avec $\dim W = d$.*
- *π est birationnel et propre.*
- *Le lieu de pôles de $\pi^*\omega$ est disjoint à la transformée stricte $\widetilde{K}$.*

$\rightsquigarrow$ il suffit de considérer la résolution des singularités plongée de

$$X = \partial_z S \cup Z(\omega) \cup P(\omega).$$

Proposition (Belkale-Brosnan, Critère géométrique de convergence)

Une intégrale $\int_K \omega$ sur K semi-algébrique compacte est absolument convergente sii $\exists$ suite finie d'éclatements $\pi = \pi_r \circ \cdots \circ \pi_1 : W \to \mathbb{R}^d$ sur des centres lisses où :

- *W est une sous-var. fermée de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$ avec $\dim W = d$.*
- *π est birationnel et propre.*
- *Le lieu de pôles de $\pi^*\omega$ est disjoint à la transformée stricte $\widetilde{K}$.*

$\rightsquigarrow$ il suffit de considérer la résolution des singularités plongée de

$$X = \partial_z S \cup Z(\omega) \cup P(\omega).$$

$\rightsquigarrow$ en utilisant la décomposition par hypercubes de $\mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$:

$$\widetilde{K} \longrightarrow \widetilde{K}_1 \sqcup \ldots \sqcup \widetilde{K}_n \text{ semi-algébriques compactes affines.}$$

Proposition (Belkale-Brosnan, Critère géométrique de convergence)

Une intégrale $\int_K \omega$ sur K semi-algébrique compacte est absolument convergente sii $\exists$ suite finie d'éclatements $\pi = \pi_r \circ \cdots \circ \pi_1 : W \to \mathbb{R}^d$ sur des centres lisses où :

- *W est une sous-var. fermée de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$ avec $\dim W = d$.*
- *π est birationnel et propre.*
- *Le lieu de pôles de $\pi^*\omega$ est disjoint à la transformée stricte $\widetilde{K}$.*

$\rightsquigarrow$ il suffit de considérer la résolution des singularités plongée de

$$X = \partial_z S \cup Z(\omega) \cup P(\omega).$$

$\rightsquigarrow$ en utilisant la décomposition par hypercubes de $\mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$:

$$\widetilde{K} \longrightarrow \widetilde{K}_1 \sqcup \ldots \sqcup \widetilde{K}_n \text{ semi-algébriques compactes affines.}$$

- La désingularisation de Hironaka est algorithmique effective en car. 0 (Villamayor, 89).

Proposition (Belkale-Brosnan, Critère géométrique de convergence)

Une intégrale $\int_K \omega$ sur K semi-algébrique compacte est absolument convergente sii $\exists$ suite finie d'éclatements $\pi = \pi_r \circ \cdots \circ \pi_1 : W \to \mathbb{R}^d$ sur des centres lisses où :

- *W est une sous-var. fermée de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$ avec $\dim W = d$.*
- *π est birationnel et propre.*
- *Le lieu de pôles de $\pi^*\omega$ est disjoint à la transformée stricte $\widetilde{K}$.*

$\rightsquigarrow$ il suffit de considérer la résolution des singularités plongée de

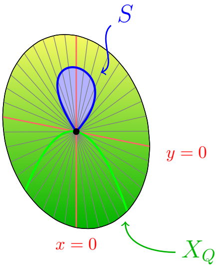
$$X = \partial_z S \cup Z(\omega) \cup P(\omega).$$

$\rightsquigarrow$ en utilisant la décomposition par hypercubes de $\mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$:

$$\widetilde{K} \longrightarrow \widetilde{K}_1 \sqcup \ldots \sqcup \widetilde{K}_n \text{ semi-algébriques compactes affines.}$$

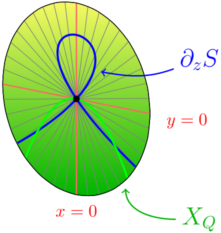
- La désingularisation de Hironaka est algorithmique effective en car. 0 (Villamayor, 89).

Domaines compactes dans $\mathbb{R}^2$ et cônes tangents



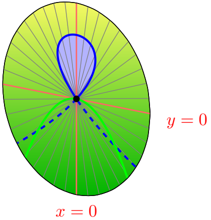
$$\int_S \frac{P}{Q}$$

Domaines compactes dans $\mathbb{R}^2$ et cônes tangents

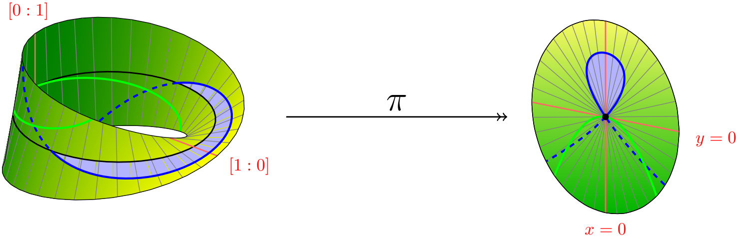


$$\int_S \frac{P}{Q}$$

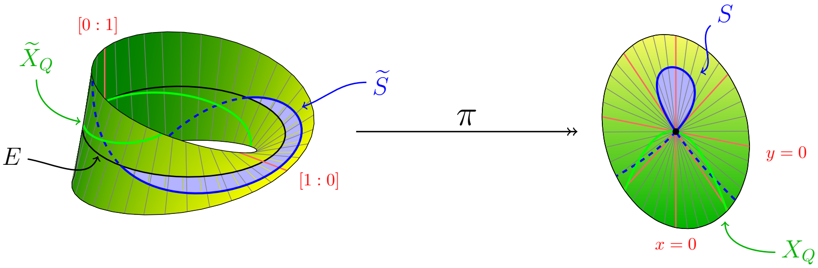
Domaines compactes dans $\mathbb{R}^2$ et cônes tangents



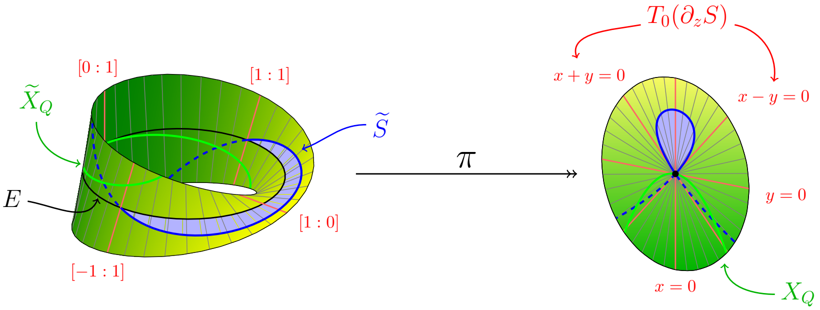
Domaines compactes dans $\mathbb{R}^2$ et cônes tangents



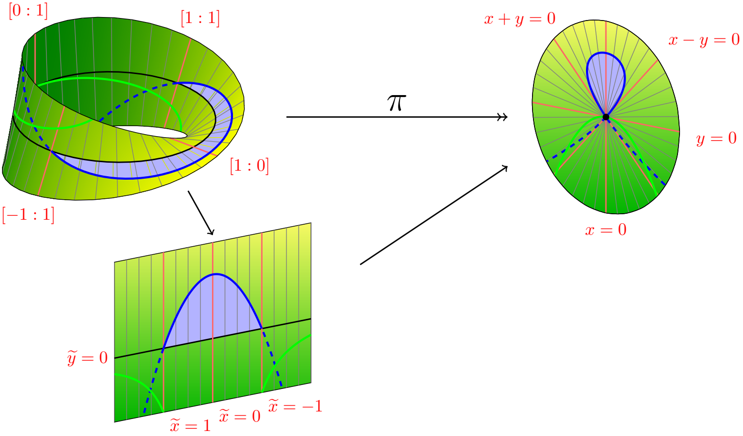
Domaines compactes dans $\mathbb{R}^2$ et cônes tangents



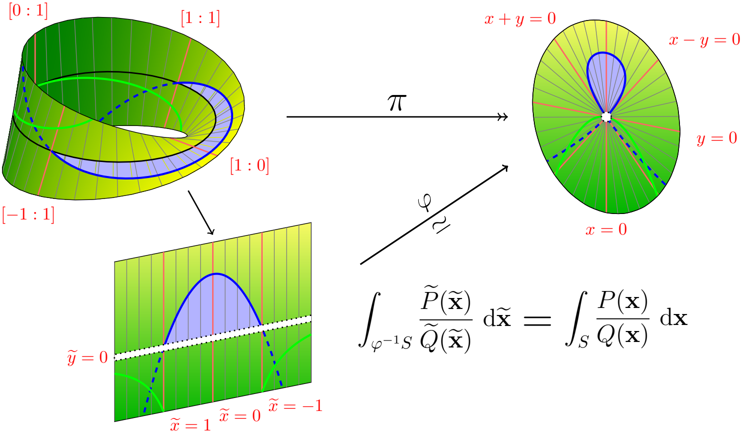
Domaines compactes dans $\mathbb{R}^2$ et cônes tangents



Domaines compactes dans $\mathbb{R}^2$ et cônes tangents



Domaines compactes dans $\mathbb{R}^2$ et cônes tangents



$$\int_{\varphi^{-1}S} \frac{\widetilde{P}(\widetilde{\mathbf{x}})}{\widetilde{Q}(\widetilde{\mathbf{x}})}\, \mathrm{d}\widetilde{\mathbf{x}} = \int_S \frac{P(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Somme d'intégrales bien définies sur des compactes $\rightsquigarrow$ prenons les volumes sous l'intégrand :

Corollaire

Toute période non-nulle $p = \mathcal{I}(S, P/Q)$ peut être exprimé comme

$$p = \mathrm{vol}_{d+1}(K_1) - \mathrm{vol}_{d+1}(K_2),$$

où K_1, K_2 sont des $\mathbb{R}_{alg}$-semi-algébriques compactes de dim $(d+1)$, obtenues algorithmiquement à partir de $(S, P/Q)$ en respectant les règles-KZ.

Somme d'intégrales bien définies sur des compactes $\rightsquigarrow$ prenons les volumes sous l'intégrand :

Corollaire

Toute période non-nulle $p = \mathcal{I}(S, P/Q)$ peut être exprimé comme

$$p = \mathrm{vol}_{d+1}(K_1) - \mathrm{vol}_{d+1}(K_2),$$

où K_1, K_2 sont des $\mathbb{R}_{alg}$-semi-algébriques compactes de dim $(d+1)$, obtenues algorithmiquement à partir de $(S, P/Q)$ en respectant les règles-KZ.

Approche géométrique : sommes de Riemann

$$
\begin{tikzcd}
 & \displaystyle\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[dl, bend right, "\text{compatification projective}"'] \arrow[ddd, "\begin{array}{l}\bullet\ \text{algorithmique}\\ \bullet\ \text{respectant les régles-KZ}\end{array}"] \\
\displaystyle\sum_i \int_{K_i} \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{résolution}\\ \text{des pôles}\end{array}"] & \\
\displaystyle\sum_{i,j} \int_{K_{i,j}} \frac{\widetilde{P}_{i,j}(x)}{\widetilde{Q}_{i,j}(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{en prennant volumes}\\ \text{sous la surface}\\ \text{intégrale}\end{array}"] & \\
\displaystyle\int_{K_+} 1\,\mathrm{d}x - \int_{K_-} 1\,\mathrm{d}x & \displaystyle\int_K 1\,\mathrm{d}x
\end{tikzcd}
$$

Approche géométrique : sommes de Riemann

$$\begin{tikzcd}
 & \displaystyle\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[dl, bend right, "\text{compatification projective}"'] \arrow[ddd, "\begin{array}{l}\bullet\ \text{algorithmique}\\ \bullet\ \text{respectant les régles-KZ}\end{array}"] \\
\displaystyle\sum_i \int_{K_i} \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{résolution}\\ \text{des pôles}\end{array}"] & \\
\displaystyle\sum_{i,j} \int_{K_{i,j}} \frac{\widetilde{P}_{i,j}(x)}{\widetilde{Q}_{i,j}(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{en prennant volumes}\\ \text{sous la surface}\\ \text{intégrale}\end{array}"] & \\
\displaystyle\int_{K_+} 1\,\mathrm{d}x - \int_{K_-} 1\,\mathrm{d}x \arrow[r, bend right, "\begin{array}{c}\text{sommes de}\\ \text{Riemann}\end{array}"'] & \displaystyle\int_K 1\,\mathrm{d}x
\end{tikzcd}$$

Injection by sommes de Riemann

Soient K_+ et K_- deux semi-algébriques compactes de dim d tels que $0 < \mathrm{vol}_d(K_-) < \mathrm{vol}_d(K_+)$.

Proposition

Il existe un semi-algébrique compact de dim d, construit algorithmiquement à partir de K_+ et K_-, tel que

$$\mathrm{vol}_d(K) = \mathrm{vol}_d(K_+) - \mathrm{vol}_d(K_-)$$

Injection by sommes de Riemann

Soient K_+ et K_- deux semi-algébriques compactes de dim d tels que $0 < \mathrm{vol}_d(K_-) < \mathrm{vol}_d(K_+)$.

Proposition

Il existe un semi-algébrique compact de dim d, construit algorithmiquement à partir de K_+ et K_-, tel que

$$\mathrm{vol}_d(K) = \mathrm{vol}_d(K_+) - \mathrm{vol}_d(K_-)$$

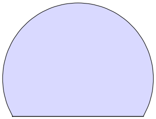
Injection by sommes de Riemann

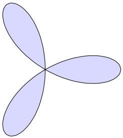
Soient K_+ et K_- deux semi-algébriques compactes de dim d tels que $0 < \mathrm{vol}_d(K_-) < \mathrm{vol}_d(K_+)$.

Proposition

Il existe un semi-algébrique compact de dim d, construit algorithmiquement à partir de K_+ et K_-, tel que

$$\mathrm{vol}_d(K) = \mathrm{vol}_d(K_+) - \mathrm{vol}_d(K_-)$$





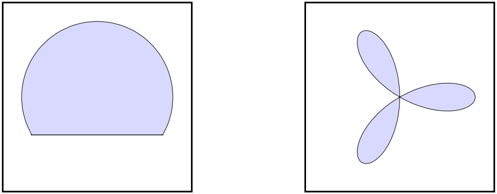
Injection by sommes de Riemann

Soient K_+ et K_- deux semi-algébriques compactes de dim d tels que $0 < \mathrm{vol}_d(K_-) < \mathrm{vol}_d(K_+)$.

Proposition

Il existe un semi-algébrique compact de dim d, construit algorithmiquement à partir de K_+ et K_-, tel que

$$\mathrm{vol}_d(K) = \mathrm{vol}_d(K_+) - \mathrm{vol}_d(K_-)$$



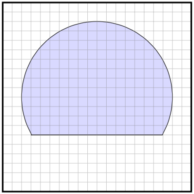
Injection by sommes de Riemann

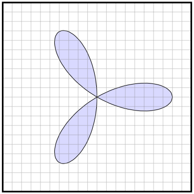
Soient K_+ et K_- deux semi-algébriques compactes de dim d tels que $0 < \mathrm{vol}_d(K_-) < \mathrm{vol}_d(K_+)$.

Proposition

Il existe un semi-algébrique compact de dim d, construit algorithmiquement à partir de K_+ et K_-, tel que

$$\mathrm{vol}_d(K) = \mathrm{vol}_d(K_+) - \mathrm{vol}_d(K_-)$$





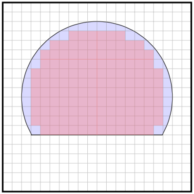
Injection by sommes de Riemann

Soient K_+ et K_- deux semi-algébriques compactes de dim d tels que $0 < \mathrm{vol}_d(K_-) < \mathrm{vol}_d(K_+)$.

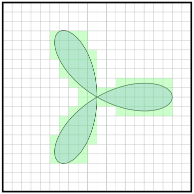
Proposition

Il existe un semi-algébrique compact de dim d, construit algorithmiquement à partir de K_+ et K_-, tel que

$$\mathrm{vol}_d(K) = \mathrm{vol}_d(K_+) - \mathrm{vol}_d(K_-)$$



Inner cubes = 136



Outer cubes = 80

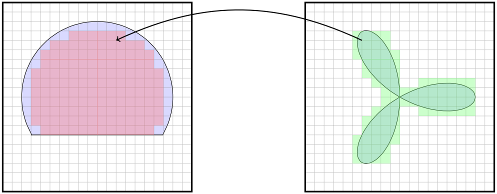
Injection by sommes de Riemann

Soient K_+ et K_- deux semi-algébriques compactes de dim d tels que $0 < \mathrm{vol}_d(K_-) < \mathrm{vol}_d(K_+)$.

Proposition

Il existe un semi-algébrique compact de dim d, construit algorithmiquement à partir de K_+ et K_-, tel que

$$\mathrm{vol}_d(K) = \mathrm{vol}_d(K_+) - \mathrm{vol}_d(K_-)$$



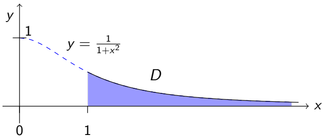
Inner cubes = 136

Outer cubes = 80

Un exemple : π

$$\frac{\pi}{4} = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

avec $D = \{x > 1, 0 < y(1+x^2) < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.



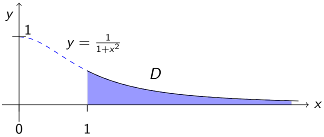
Par $U_z = \{[x : y : z] \mid z \neq 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \rightsquigarrow$ un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^2 \setminus L$

$$D_1 = \varphi^{-1} D = \left\{0 < x_1 < 1,\ 0 < y_1,\ 0 < x_1^3 - y_1(1+x_1^2)\right\},$$

Un exemple : π

$$\frac{\pi}{4} = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

avec $D = \{x > 1, 0 < y(1+x^2) < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

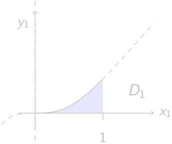


Par $U_z = \{[x : y : z] \mid z \neq 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \rightsquigarrow$ un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^2 \setminus L$

$$D_1 = \varphi^{-1}D = \left\{0 < x_1 < 1,\ 0 < y_1,\ 0 < x_1^3 - y_1(1+x_1^2)\right\},$$

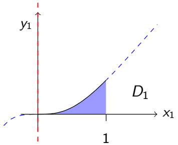
$$\mathcal{I}(D,1) = \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{D_1} \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{x_1^3}.$$

$\Longrightarrow$ le jacobien nous donne un pôle d'ordre trois à l'origine.

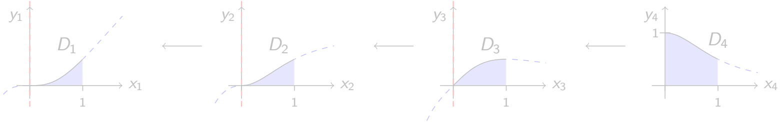


$$\mathcal{I}(D,1) = \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{D_1} \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{x_1^3}.$$

$\Longrightarrow$ le jacobien nous donne un pôle d'ordre trois à l'origine.

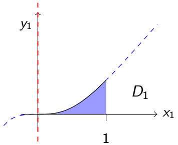


L'ordre du pôle descend par la suite d'éclatements :

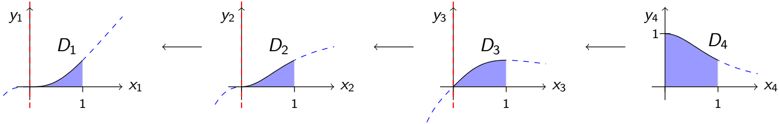


$$\mathcal{I}(D,1) = \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{D_1} \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{x_1^3}.$$

$\Longrightarrow$ le jacobien nous donne un pôle d'ordre trois à l'origine.



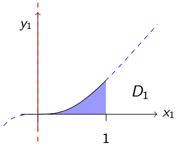
L'ordre du pôle descend par la suite d'éclatements :



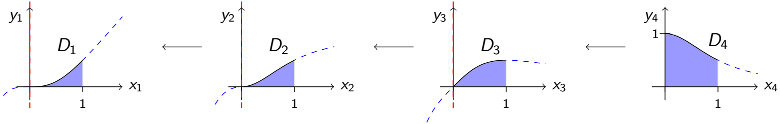
$$\Longrightarrow \frac{\pi}{4} = \int_{D_1} \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{x_1^3} = \mathrm{vol}_2\left(\left\{\begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y_4(1+x_4^2) \le 1 \end{array}\right\}\right).$$

$$\mathcal{I}(D,1) = \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{D_1} \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{x_1^3}.$$

$\Longrightarrow$ le jacobien nous donne un pôle d'ordre trois à l'origine.



L'ordre du pôle descend par la suite d'éclatements :



$$\Longrightarrow \frac{\pi}{4} = \int_{D_1} \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{x_1^3} = \mathrm{vol}_2\left(\left\{ \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y_4(1+x_4^2) \le 1 \end{array} \right\}\right).$$

Quelques applications:
Complexité de périodes et problèmes géométriques reliés

"On the equality of periods of Kontsevich-Zagier.", avec Jacky Cresson, preprint.

Degré de périodes

J. Wan, Degrees of periods, *Preprint*, 2011.

Définition-Théorème

La degré d'une période réelle $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$:

$$\deg(p) = \min\{d \in \mathbb{N} \mid \exists K \subset \mathbb{R}^d \textit{ s.alg. compact tel que } |p| = \mathrm{vol}_d(K)\},$$

Cela induit une filtration de la $\overline{\mathbb{Q}}$–algèbre de périodes.

Degré de périodes

J. Wan, Degrees of periods, *Preprint*, 2011.

Définition-Théorème

La degré d'une période réelle $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$:

$$\deg(p) = \min\{d \in \mathbb{N} \mid \exists K \subset \mathbb{R}^d \text{ s.alg. compact tel que } |p| = \mathrm{vol}_d(K)\},$$

Cela induit une filtration de la $\overline{\mathbb{Q}}$–algèbre de périodes.

Proprieté (Critère géométrique de transcendance de périodes)

$p \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ *si et seulement si* $\deg(p) = 1$.

Degré de périodes

J. Wan, DEGREES OF PERIODS, *Preprint*, 2011.

Définition-Théorème

La degré d'une période réelle $p \in \mathcal{P}_{\text{KZ}}$ *:*

$$\deg(p) = \min\{d \in \mathbb{N} \mid \exists K \subset \mathbb{R}^d \textit{ s.alg. compact tel que } |p| = \mathrm{vol}_d(K)\},$$

Cela induit une filtration de la $\overline{\mathbb{Q}}$*–algèbre de périodes.*

Proprieté (Critère géométrique de transcendance de périodes)

$p \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ *si et seulement si* $\deg(p) = 1$.

EN GÉNÉRALE : très difficile de calculer !

$$\pi^2 = \mathrm{vol}_3\left(\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z((x^2+y^2)^2+1) \leq 4 \end{array}\right\}\right) \Longrightarrow 2 \leq \deg(\pi^2) \leq 3.$$

Degré de périodes

J. Wan, Degrees of periods, *Preprint*, 2011.

Définition-Théorème

La degré d'une période réelle $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}$:

$$\deg(p) = \min\{d \in \mathbb{N} \mid \exists K \subset \mathbb{R}^d \textit{ s.alg. compact tel que } |p| = \mathrm{vol}_d(K)\},$$

Cela induit une filtration de la $\overline{\mathbb{Q}}$–algèbre de périodes.

Proprieté (Critère géométrique de transcendance de périodes)

$p \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ *si et seulement si* $\deg(p) = 1$.

En générale : très difficile de calculer !

$$\pi^2 = \mathrm{vol}_3\left(\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z((x^2+y^2)^2 + 1) \leq 4 \end{array} \right\}\right) \Longrightarrow 2 \leq \deg(\pi^2) \leq 3.$$

Complexité géométrique de périodes

Définition

La *Complexité d'un semi-algébrique* $S \subset \mathbb{R}^d$ est la triplet (d, r, c), où (r, c) est la plus petite tuple (en ordre lexicographique) telle qu'il existe une représentation

$$S = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{f_{i,j} *_{i,j} 0\}$$

vérifiant:

- Le nb de conditions $P(R) = \sum r_i = r$.
- La degré maximal des polynômes $C(R) = \sup_{\substack{i=1,\ldots,s \\ j=1,\ldots,r_i}} \deg f_{i,j} = c$.

Complexité géométrique de périodes

Définition

La *complexité géométrique* de $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}^{\mathbb{R}}$ est le triplet minimal $(d, r, c) \in \mathbb{N}$ par rapport à l'ordre lexicographique tel qu'il existe un semi-algébrique compact K de complexité (d, r, c) vérifiant $|p| = \mathrm{vol}_d(S)$.

Proposition

La complexité géométrique minimal qui peut être atteint par une période transcendante est $(2, 1, 2)$.

Complexité géométrique de périodes

Définition

La *complexité géométrique* de $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}^{\mathbb{R}}$ est le triplet minimal $(d, r, c) \in \mathbb{N}$ par rapport à l'ordre lexicographique tel qu'il existe un semi-algébrique compact K de complexité (d, r, c) vérifiant $|p| = \mathrm{vol}_d(S)$.

Proposition

La complexité géométrique minimal qui peut être atteint par une période transcendante est $(2, 1, 2)$.

$$\rightsquigarrow \pi = \mathrm{vol}_2(\{x^2 + y^2 - 1 \leq 0\})$$

Complexité géométrique de périodes

Définition

La *complexité géométrique* de $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{KZ}}^{\mathbb{R}}$ est le triplet minimal $(d, r, c) \in \mathbb{N}$ par rapport à l'ordre lexicographique tel qu'il existe un semi-algébrique compact K de complexité (d, r, c) vérifiant $|p| = \mathrm{vol}_d(S)$.

Proposition

La complexité géométrique minimal qui peut être atteint par une période transcendante est $(2, 1, 2)$.

$$\rightsquigarrow \pi = \mathrm{vol}_2(\{x^2 + y^2 - 1 \leq 0\})$$

Un problème géométrique à la Kontsevich-Zagier pour périodes

Problème (Un problème géométrique à la Kontsevich-Zagier pour périodes)

Soient K_1, K_2 semi-algébriques compacts dans $\mathbb{R}^d$ tels que $\mathrm{vol}_d(K_1) = \mathrm{vol}_d(K_2)$. Peut-on transformer K_1 dans K_2 uniquement en utilisant les opérations géométriques suivantes :

- *découpage semi-algebraic,*
- *applications algébriques préservant le volume,*
- *relations du type $K \times [0,1]^r \sim K$?*

Un problème géométrique à la Kontsevich-Zagier pour périodes

Problème (Un problème géométrique à la Kontsevich-Zagier pour périodes)

Soient K_1, K_2 *semi-algébriques compacts dans* $\mathbb{R}^d$ *tels que* $\mathrm{vol}_d(K_1) = \mathrm{vol}_d(K_2)$. *Peut-on transformer* K_1 *dans* K_2 *uniquement en utilisant les opérations géométriques suivantes :*

- *découpage semi-algebraic,*
- *applications algébriques préservant le volume,*
- *relations du type* $K \times [0,1]^r \sim K$ *?*

Contraintes

Ensembles, découpages et transformations doivent respecter la $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$–rationalité !

Un problème géométrique à la Kontsevich-Zagier pour périodes

Problème (Un problème géométrique à la Kontsevich-Zagier pour périodes)

Soient K_1, K_2 semi-algébriques compacts dans $\mathbb{R}^d$ tels que $\mathrm{vol}_d(K_1) = \mathrm{vol}_d(K_2)$. Peut-on transformer K_1 dans K_2 uniquement en utilisant les opérations géométriques suivantes :

- *découpage semi-algebraic,*
- *applications algébriques préservant le volume,*
- *relations du type $K \times [0,1]^r \sim K$?*

Contraintes

Ensembles, découpages et transformations doivent respecter la $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$–rationalité !

Un réponse affirmative à ce problème géométrique implique la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier.

Un problème géométrique à la Kontsevich-Zagier pour périodes

Problème (Un problème géométrique à la Kontsevich-Zagier pour périodes)

Soient K_1, K_2 semi-algébriques compacts dans $\mathbb{R}^d$ tels que $\mathrm{vol}_d(K_1) = \mathrm{vol}_d(K_2)$. Peut-on transformer K_1 dans K_2 uniquement en utilisant les opérations géométriques suivantes :

- *découpage semi-algebraic,*
- *applications algébriques préservant le volume,*
- *relations du type $K \times [0,1]^r \sim K$?*

Contraintes

Ensembles, découpages et transformations doivent respecter la $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$–rationalité !

Un réponse affirmative à ce problème géométrique implique la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier.

Approche géométrique : une réduction PL

$$
\begin{tikzcd}
 & \displaystyle\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[dl, bend right, "\text{compatification projective}"'] \arrow[ddd, "\begin{array}{l}\bullet\ \text{algorithmique}\\ \bullet\ \text{respectant les régles-KZ}\end{array}"] \\
\displaystyle\sum_i \int_{K_i} \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{résolution}\\ \text{des pôles}\end{array}"] & \\
\displaystyle\sum_{i,j} \int_{K_{i,j}} \frac{\widetilde{P}_{i,j}(x)}{\widetilde{Q}_{i,j}(x)}\,\mathrm{d}x \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{en prennant volumes}\\ \text{sous la surface}\\ \text{intégrale}\end{array}"] & \\
\displaystyle\int_{K_+} 1\,\mathrm{d}x - \int_{K_-} 1\,\mathrm{d}x \arrow[r, bend right, "\begin{array}{c}\text{sommes de}\\ \text{Riemann}\end{array}"'] & \displaystyle\int_K 1\,\mathrm{d}x
\end{tikzcd}
$$

Approche géométrique : une réduction PL

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{compatification projective}} \sum_i \int_{K_i} \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\sum_i \int_{K_i} \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{résolution des pôles}} \sum_{i,j} \int_{K_{i,j}} \frac{\widetilde{P}_{i,j}(x)}{\widetilde{Q}_{i,j}(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\sum_{i,j} \int_{K_{i,j}} \frac{\widetilde{P}_{i,j}(x)}{\widetilde{Q}_{i,j}(x)}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{en prennant volumes sous la surface intégrale}} \int_{K_+} 1\,\mathrm{d}x - \int_{K_-} 1\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{K_+} 1\,\mathrm{d}x - \int_{K_-} 1\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{sommes de Riemann}} \int_K 1\,\mathrm{d}x$$

$$\int_S \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_K 1\,\mathrm{d}x$$

- algorithmique
- respectant les régles-KZ

$$\int_K 1\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{Triangulation Semi-alg.}} \int_P \omega_{\mathrm{PA}}\,\mathrm{d}x$$

Toute la complexité sur L'INTÉGRANDE

P : POLYÈDRE RATIONNEL

ω_{PA} : FORME ALGÉBRIQUE PAR MORCEAUX

3ème problème de Hilbert généralisé pour périodes

Problème (Polyèdres rationnels : 3ème problème de Hilbert généralisé)

Soient (P_1, ω_1) et (P_2, ω_2) polyèdres rationnels dans $\mathbb{R}^d$ avec deux formes de volume algébriques par morceaux telles que $\int_{P_1} \omega_1 = \int_{P_2} \omega_2$. Peut-on passer d'une intégral sur l'autre uniquement par

- *découpage de polyèdres rationnels,*
- *et transformations algébriques par morceaux préservant le volume ?*

- Quelques résultats connus et obstructions:
  - Vraie si $\omega_1 = \omega_2 = \mathrm{d}\mathbf{x}^d$ (Henriques-Pak, 2004) par *décomposition en morceaux convexes.*

3ème problème de Hilbert généralisé pour périodes

Problème (Polyèdres rationnels : 3ème problème de Hilbert généralisé)

Soient (P_1, ω_1) et (P_2, ω_2) polyèdres rationnels dans $\mathbb{R}^d$ avec deux formes de volume algébriques par morceaux telles que $\int_{P_1} \omega_1 = \int_{P_2} \omega_2$. Peut-on passer d'une intégral sur l'autre uniquement par

- *découpage de polyèdres rationnels,*
- *et transformations algébriques par morceaux préservant le volume ?*

- Quelques résultats connus et obstructions:
  - Vraie si $\omega_1 = \omega_2 = \mathrm{d}\mathbf{x}^d$ (Henriques-Pak, 2004) par *décomposition en morceaux convexes*.
  - Preuve basée sur le théorème de Moser *non explicite* sur applications préservant le volume en variétés différentielles.

$3^{\text{ème}}$ problème de Hilbert généralisé pour périodes

Problème (Polyèdres rationnels : $3^{\text{ème}}$ problème de Hilbert généralisé)

Soient (P_1, ω_1) et (P_2, ω_2) polyèdres rationnels dans $\mathbb{R}^d$ avec deux formes de volume algébriques par morceaux telles que $\int_{P_1} \omega_1 = \int_{P_2} \omega_2$. Peut-on passer d'une intégral sur l'autre uniquement par

- *découpage de polyèdres rationnels,*
- *et transformations algébriques par morceaux préservant le volume ?*

- Quelques résultats connus et obstructions:
  - Vraie si $\omega_1 = \omega_2 = \mathrm{d}\mathbf{x}^d$ (Henriques-Pak, 2004) par *décomposition en morceaux convexes*.
  - Preuve basée sur le théorème de Moser *non explicite* sur applications préservant le volume en variétés différentielles.
- Une possible stratégie pour la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier: généraliser les résultats de Henriques et Pak.

$3^{\text{ème}}$ problème de Hilbert généralisé pour périodes

Problème (Polyèdres rationnels : $3^{\text{ème}}$ problème de Hilbert généralisé)

Soient (P_1, ω_1) et (P_2, ω_2) polyèdres rationnels dans $\mathbb{R}^d$ avec deux formes de volume algébriques par morceaux telles que $\int_{P_1} \omega_1 = \int_{P_2} \omega_2$. Peut-on passer d'une intégral sur l'autre uniquement par

- *découpage de polyèdres rationnels,*
- *et transformations algébriques par morceaux préservant le volume ?*

- QUELQUES RÉSULTATS CONNUS ET OBSTRUCTIONS:
  - VRAIE si $\omega_1 = \omega_2 = \mathrm{d}\mathbf{x}^d$ (Henriques-Pak, 2004) par *décomposition en morceaux convexes*.
  - Preuve basée sur le théorème de Moser *non explicite* sur applications préservant le volume en variétés différentielles.
- UNE POSSIBLE STRATÉGIE POUR LA CONJECTURE DES PÉRIODES DE KONTSEVICH-ZAGIER: généraliser les résultats de Henriques et Pak.

Perspectives and continuation

Perspectives et continuation

- Étude sur la décidabilité du problème de *0-reconnaissance* pour périodes de Kontsevich-Zagier (travaux avec M. Yoshinaga).

Perspectives et continuation

- Étude sur la décidabilité du problème de *0-reconnaissance* pour périodes de Kontsevich-Zagier (travaux avec M. Yoshinaga).
- Compléter la notion de complexité géométrique avec une complexité *arithmétique*.

Perspectives et continuation

- Étude sur la décidabilité du problème de *0-reconnaissance* pour périodes de Kontsevich-Zagier (travaux avec M. Yoshinaga).
- Compléter la notion de complexité géométrique avec une complexité *arithmétique*.
- Étude des périodes de degré 2.

Perspectives et continuation

- Étude sur la décidabilité du problème de *0-reconnaissance* pour périodes de Kontsevich-Zagier (travaux avec M. Yoshinaga).
- Compléter la notion de complexité géométrique avec une complexité *arithmétique*.
- Étude des périodes de degré 2.
- Une THÉORIE D'APPROXIMATION basé en approximations géométriques de volumes.

Perspectives et continuation

- Étude sur la décidabilité du problème de *0-reconnaissance* pour périodes de Kontsevich-Zagier (travaux avec M. Yoshinaga).
- Compléter la notion de complexité géométrique avec une complexité *arithmétique*.
- Étude des périodes de degré 2.
- Une THÉORIE D'APPROXIMATION basé en approximations géométriques de volumes.
- Implémentation de la réduction semi-canonique en `Sage/Singular`.

Perspectives et continuation

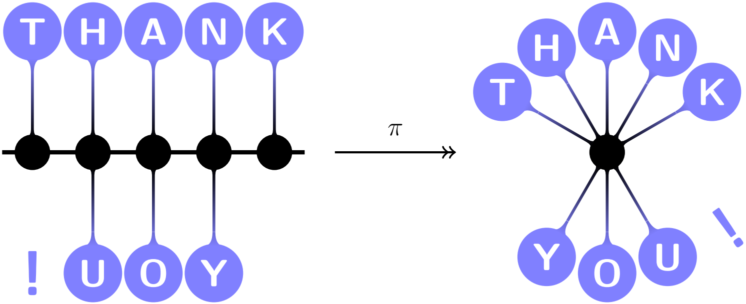
- Étude sur la décidabilité du problème de *0-reconnaissance* pour périodes de Kontsevich-Zagier (travaux avec M. Yoshinaga).
- Compléter la notion de complexité géométrique avec une complexité *arithmétique*.
- Étude des périodes de degré 2.
- Une THÉORIE D'APPROXIMATION basé en approximations géométriques de volumes.
- Implémentation de la réduction semi-canonique en `Sage/Singular`.
- Étude combinatoire de périodes par le polyèdre de Newton.

Perspectives et continuation

- Étude sur la décidabilité du problème de *0-reconnaissance* pour périodes de Kontsevich-Zagier (travaux avec M. Yoshinaga).
- Compléter la notion de complexité géométrique avec une complexité *arithmétique*.
- Étude des périodes de degré 2.
- Une THÉORIE D'APPROXIMATION basé en approximations géométriques de volumes.
- Implémentation de la réduction semi-canonique en `Sage/Singular`.
- Étude combinatoire de périodes par le polyèdre de Newton.
- Une approche géométrique analogue pour *périodes exponentielles*.

Perspectives et continuation

- Étude sur la décidabilité du problème de *0-reconnaissance* pour périodes de Kontsevich-Zagier (travaux avec M. Yoshinaga).
- Compléter la notion de complexité géométrique avec une complexité *arithmétique*.
- Étude des périodes de degré 2.
- Une THÉORIE D'APPROXIMATION basé en approximations géométriques de volumes.
- Implémentation de la réduction semi-canonique en `Sage/Singular`.
- Étude combinatoire de périodes par le polyèdre de Newton.
- Une approche géométrique analogue pour *périodes exponentielles*.


THANK
! UOY
π
THANK
YOU !