Principales modelos de variables aleatorias

Estadística y Optimización

Universidad Politécnica de Madrid

Contenidos

- **Variables aleatorias discretas,**
- **Variables aleatorias continuas,**
- **Teorema Central del Límite.**

22 de marzo 2021

Juan Viu Sos

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Modelos discretos

Variable aleatoria uniforme discreta: $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$

- $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$.
- **Modelos equiprobables discretos**: el resultado de lanzar una moneda equilibrada, un dado equilibrado, ...
- Para un conjunto de n elementos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con misma probabilidad:

$$\boxed{P(X = x_k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \ldots, n}$$

- **Esperanza y varianza:**

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \overline{x}, \qquad V[X] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{x}^2}$$

- $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$.
- **Modelos equiprobables discretos**: el resultado de lanzar una moneda equilibrada, un dado equilibrado, ...
- Para un conjunto de n elementos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con misma probabilidad:

$$\boxed{P\left(X = x_k\right) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \ldots, n}$$

- **Esperanza y varianza:**

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \overline{x}, \qquad V[X] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{x}^2}$$

Variable aleatoria uniforme discreta: $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$

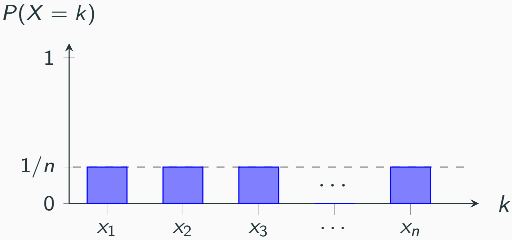


Figura 1: Función de masa de probabilidad de $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$

Variable aleatoria de Bernoulli: $X \sim \mathcal{B}er(p)$

- $X \sim \mathcal{B}er(p)$.
- Si tenemos un experimento y un **suceso "éxito"** E con

$$\boxed{P(E) = p \in [0,1] \quad \text{y} \quad P\left(\overline{E}\right) = q = 1 - p}$$

Notación: $q = 1 - p$.

- **Experimentos binarios**: Si/No, Éxito/fracaso,..
  - Lanzar una moneda y $E = \{$"salga cara"$\}$.
  - Lanzar dos dados y $E = \{$"suma más de 10"$\}$.
  - Escoge una persona al azar y $E = \{$"tiene una cierta enfermedad"$\}$.

Variable aleatoria de Bernoulli: $X \sim \mathcal{B}er(p)$

- $X \sim \mathcal{B}er(p)$.

- Si tenemos un experimento y un **suceso “éxito”** E con

$$\boxed{P(E) = p \in [0,1] \quad \text{y} \quad P\left(\overline{E}\right) = q = 1 - p}$$

Notación: $q = 1 - p$.

- **Experimentos binarios**: Si/No, Éxito/fracaso,..
  - Lanzar una moneda y $E = \{$“salga cara”$\}$.
  - Lanzar dos dados y $E = \{$“suma más de 10”$\}$.
  - Escoge una persona al azar y $E = \{$“tiene una cierta enfermedad”$\}$.

- **Función de masa de probabilidad:** $X \sim \mathcal{B}er(p)$ toma valores

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si } E \\ 0, & \text{si } \overline{E}. \end{cases}$$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	q	p

Variable aleatoria de Bernoulli: $X \sim \mathcal{B}er(p)$

- $X \sim \mathcal{B}er(p)$.
- Si tenemos un experimento y un **suceso "éxito"** E con

$$\boxed{P(E) = p \in [0,1] \quad \text{y} \quad P\left(\overline{E}\right) = q = 1-p}$$

Notación: $q = 1 - p$.

- **Experimentos binarios**: Si/No, Éxito/fracaso,..
  - Lanzar una moneda y $E = \{\text{"salga cara"}\}$.
  - Lanzar dos dados y $E = \{\text{"suma más de 10"}\}$.
  - Escoge una persona al azar y $E = \{\text{"tiene una cierta enfermedad"}\}$.
- **Función de masa de probabilidad:** $X \sim \mathcal{B}er(p)$ toma valores

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si } E \\ 0, & \text{si } \overline{E}. \end{cases}$$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	q	p

Variable aleatoria de Bernoulli: $X \sim \mathcal{B}er(p)$

Esperanza y varianza:

$$\boxed{E[X] = p} \qquad \boxed{V[X] = pq.}$$

Función generadora de momentos y función característica:

$$\boxed{M(t) = q + pe^{t}} \qquad \boxed{\varphi(t) = q + pe^{it}}$$

Variable aleatoria de Bernoulli: $X \sim \mathcal{B}er(p)$

- **Esperanza y varianza:**

$$\boxed{E[X] = p} \qquad \boxed{V[X] = pq.}$$

- **Función generadora de momentos y función característica:**

$$\boxed{M(t) = q + pe^t} \qquad \boxed{\varphi(t) = q + pe^{it}}$$

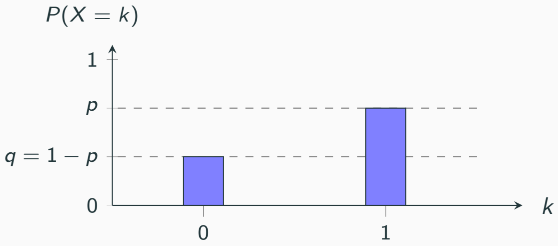
Variable aleatoria de Bernoulli: $X \sim \mathcal{B}er(p)$

- **Esperanza y varianza:**

$$\boxed{E[X] = p} \qquad \boxed{V[X] = pq.}$$

- **Función generadora de momentos y función característica:**

$$\boxed{M(t) = q + pe^{t}} \qquad \boxed{\varphi(t) = q + pe^{it}}$$



Variable aleatoria binomial: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
- Contar $X =$ núm. de éxitos en n pruebas de Bernoulli independientes de mismo parámetro p:

$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{con} \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{con prob. } p \\ 0, & \text{con prob. } q = 1 - p. \end{cases}$$

- **Ejemplo:** Tiramos un dado 5 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 veces un 3?
  - $E = \{\text{“obtener un 3”}\}$ con $P(E) = 1/6$, por lo que $X \sim \mathcal{B}(5, 1/6)$.

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= (\text{núm. de formas de obtener 2 éxitos sobre 5 intentos}) \times \\ &\quad \times P(E)^2 \times P\left(\overline{E}\right)^3 \\ &= \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.16. \end{aligned}$$

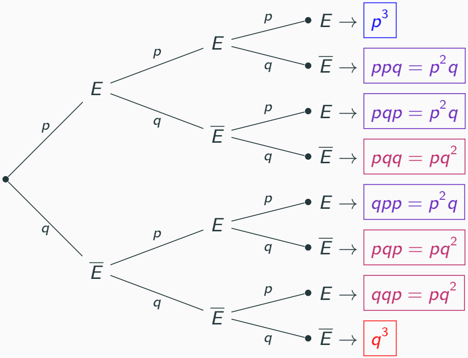
Variable aleatoria binomial: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
- Contar $X =$ núm. de éxitos en n pruebas de Bernoulli independientes de mismo parámetro p:

$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{con} \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{con prob. } p \\ 0, & \text{con prob. } q = 1 - p. \end{cases}$$

- **Ejemplo:** Tiramos un dado 5 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 veces un 3?
  - $E = \{\text{“obtener un 3”}\}$ con $P(E) = 1/6$, por lo que $X \sim \mathcal{B}(5, 1/6)$.

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= (\text{núm. de formas de obtener 2 éxitos sobre 5 intentos}) \times \\ &\times P(E)^2 \times P\left(\overline{E}\right)^3 \\ &= \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.16. \end{aligned}$$



$p^3 : \binom{3}{3} = 1 \qquad p^2q : \binom{3}{2} = 3$

$pq^2 : \binom{3}{1} = 3 \qquad q^3 : \binom{3}{0} = 1$

Figura 2: Las distintas combinaciones de k éxitos en una $\mathcal{B}(3, p)$.

Variable aleatoria binomial: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

- **Función de masa de probabilidad:** $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ toma valores en $k = 0, \ldots, n$ con:

$$\boxed{P\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n}$$

- **Esperanza y varianza:** Estamos sumando n variables independientes $X_i \sim \mathcal{B}er(p)$:

$$\boxed{E[X] = np} \qquad \boxed{V[X] = npq.}$$

- **Función generadora de momentos y función característica:** Por la misma razón,

$$\boxed{M(t) = (q + pe^t)^n} \qquad \boxed{\varphi(t) = (q + pe^{it})^n}$$

- **Función de masa de probabilidad:** $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ toma valores en $k = 0,\dots,n$ con:

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,\dots,n}$$

- **Esperanza y varianza:** Estamos sumando n variables independientes $X_i \sim \mathcal{B}er(p)$:

$$\boxed{E[X] = np} \qquad \boxed{V[X] = npq.}$$

- **Función generadora de momentos y función característica:** Por la misma razón,

$$\boxed{M(t) = (q + pe^t)^n} \qquad \boxed{\varphi(t) = (q + pe^{it})^n}$$

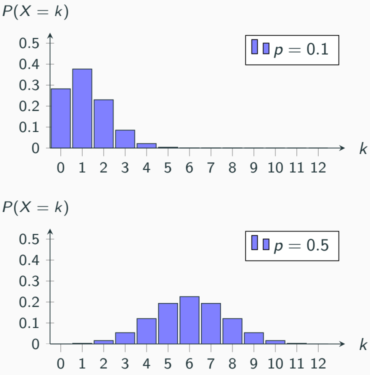


Figura 3: Binomial $X \sim \mathcal{B}(12, p)$ con valores $p = 0.1, 0.25, 0.5$ y 0.75.

- **Propiedad de la suma:** Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ y $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ son independientes, entonces

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p).$$

- **Problema:** Para valores de n grandes y/o p muy pequeños, las probabilidades $P(X = k)$ son complicadas de calcular en la práctica.

- **Propiedad de la suma:** Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ y $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ son independientes, entonces

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p).$$

- **Problema:** Para valores de n grandes y/o p muy pequeños, las probabilidades $P\left(X = k\right)$ son complicadas de calcular en la práctica.

- $X \sim \mathcal{G}(p)$
- Contar $X =$ núm. de pruebas de Bernoulli $X_i \sim \mathcal{B}er(p)$ independientes hasta obtener el primer éxito E:

$$\underbrace{\overline{E}, \overline{E}, \cdots, \overline{E}}_{k-1 \text{ fracasos}}, E \longleftarrow \text{éxito en la } k\text{-ésima prueba}$$

- **Función de masa de probabilidad:** $X \sim \mathcal{G}(p)$ toma valores $k = 1, 2, 3, \ldots$ con probabilidad:

$$\boxed{P(X = k) = q^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots}$$

- **Función de distribución:**

$$F(k) = P(X \leq k) = 1 - \underbrace{P(X > k)}_{\text{prob. fracasar } k \text{ veces}} = 1 - q^k.$$

Variable aleatoria geométrica: $X \sim \mathcal{G}(p)$

- $X \sim \mathcal{G}(p)$
- Contar $X =$ núm. de pruebas de Bernoulli $X_i \sim \mathcal{B}er(p)$ independientes hasta obtener el primer éxito E:

$$\underbrace{\overline{E}, \overline{E}, \cdots, \overline{E}}_{k-1 \text{ fracasos}}, E \longleftarrow \text{éxito en la } k\text{-ésima prueba}$$

- **Función de masa de probabilidad:** $X \sim \mathcal{G}(p)$ toma valores $k = 1, 2, 3, \ldots$ con probabilidad:

$$\boxed{P(X = k) = q^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots}$$

- **Función de distribución:**

$$F(k) = P(X \leq k) = 1 - \underbrace{P(X > k)}_{\text{prob. fracasar } k \text{ veces}} = 1 - q^k.$$

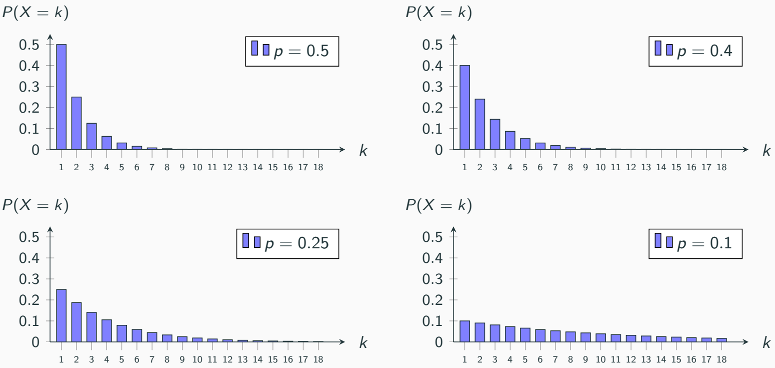


Figura 4: Geométrica $X \sim \mathcal{G}(p)$ con parámetros $p = 0.5, 0.4, 0.25$ y 0.1.

Variable aleatoria geométrica: $X \sim \mathcal{G}(p)$

- **Función generadora de momentos y función característica:** Calculando $M(t) = E[e^{tX}]$ y $\varphi(t) = E[e^{itX}]$:

$$\boxed{M(t) = \frac{p}{e^{-t} - q}} \qquad \boxed{\varphi(t) = \frac{p}{e^{-it} - q}}$$

Nota: $M(t)$ está definida para $|qe^t| < 1$, o equivalentemente $t < \log(1/q)$.

- **Esperanza y varianza:** Basta hallar las derivadas $M'(0)$ y $M''(0)$:

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{p}} \qquad \boxed{V[X] = \frac{q}{p^2}.}$$

Ejemplo: Vistos en clase.

1. X = núm. de lanzamientos de una moneda hasta que sale cara, $X \sim \mathcal{G}(1/2)$:

$$P(X = k) = \frac{1}{2^{k-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}.$$

$$E[X] = 2, \quad V[X] = 2, \quad M(t) = \frac{1}{2e^{-t} - 1}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2e^{-it} - 1}.$$

2. Y = núm. de lanzamientos de un dado hasta que sale un 5, $Y \sim \mathcal{G}(1/6)$:

$$P(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k}.$$

$$E[Y] = 6, \quad V[Y] = 30, \quad M(t) = \frac{1}{6e^{-t} - 5}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{6e^{-it} - 5}.$$

Propiedad de "Falta de memoria": Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, para todo $m, k \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$P\left(X = m + k \,|\, X > m\right) = P\left(X = k\right).$$

Interpretación: no importa que hayamos observado m fracasos antes...¡la probabilidad de obtener un éxito en la siguiente k-ésima vez es la misma!

Variable aleatoria geométrica: $X \sim \mathcal{G}(p)$

- **Propiedad de "Falta de memoria":** Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, para todo $m, k \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$P\left(X = m + k \,|\, X > m\right) = P\left(X = k\right).$$

Interpretación: no importa que hayamos observado m fracasos antes...¡la probabilidad de obtener un éxito en la siguiente k-ésima vez es la misma!

- **Ejemplo:** Si llevamos 15 cruces seguidas, ¿nos saldrá seguro cara en la siguiente tirada?

Variable aleatoria geométrica: $X \sim \mathcal{G}(p)$

- **Propiedad de "Falta de memoria":** Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, para todo $m, k \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$P(X = m + k \mid X > m) = P(X = k).$$

Interpretación: no importa que hayamos observado m fracasos antes...¡la probabilidad de obtener un éxito en la siguiente k-ésima vez es la misma!

- **Ejemplo:** Si llevamos 15 cruces seguidas, ¿nos saldrá seguro cara en la siguiente tirada?

$$X = \text{“lanzamientos hasta obtener cara”} \sim \mathcal{G}(1/2)$$

$$P(\text{“cara en la que sigue”} \mid \text{“llevamos 15 cruces”}) = P(X = 16 \mid X > 15)$$
$$\overset{\text{falta mem.}}{=} P(X = 1) = P(\text{“cara en la primera”}) = \frac{1}{2}.$$

Variable aleatoria geométrica: $X \sim \mathcal{G}(p)$

- **Propiedad de "Falta de memoria":** Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, para todo $m, k \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$P\left(X = m + k \mid X > m\right) = P\left(X = k\right).$$

Interpretación: no importa que hayamos observado m fracasos antes...¡la probabilidad de obtener un éxito en la siguiente k-ésima vez es la misma!

- **Ejemplo:** Si llevamos 15 cruces seguidas, ¿nos saldrá seguro cara en la siguiente tirada?

$$X = \text{"lanzamientos hasta obtener cara"} \sim \mathcal{G}(1/2)$$

$$P\left(\text{"cara en la que sigue"} \mid \text{"llevamos 15 cruces"}\right) = P\left(X = 16 \mid X > 15\right)$$

$$\overset{\text{falta mem.}}{=} P\left(X = 1\right) = P\left(\text{"cara en la primera"}\right) = \frac{1}{2}.$$

Variable aleatoria geométrica: $X \sim \mathcal{G}(p)$

- **Propiedad de "Falta de memoria":** Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, para todo $m, k \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$P\left(X = m + k \,|\, X > m\right) = P\left(X = k\right).$$

Interpretación: no importa que hayamos observado m fracasos antes...¡la probabilidad de obtener un éxito en la siguiente k-ésima vez es la misma!

- **Ejemplo:** Si llevamos 15 cruces seguidas, ¿nos saldrá seguro cara en la siguiente tirada?

$$X = \text{“lanzamientos hasta obtener cara”} \sim \mathcal{G}(1/2)$$

$$P\left(\text{“cara en la que sigue”} \mid \text{“llevamos 15 cruces”}\right) = P\left(X = 16 \,|\, X > 15\right)$$
$$\overset{\text{falta mem.}}{=} P\left(X = 1\right) = P\left(\text{“cara en la primera”}\right) = \frac{1}{2}.$$

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
- Contar $X =$ núm. de veces que ocurre un suceso *en un intervalo* (de tiempo/espacio/unidad de observación), asumiendo:
  1. los sucesos se producen de forma independiente (no "tiene memoria").
  2. este suceso ocurre en promedio $\lambda > 0$ veces por unidad de observación (por hora, por km,..), siendo este promedio constante.
- **Ejemplos:**
  - Coches que pasan a través de cierto punto durante una hora.
  - Errores ortográficos en una página.
  - Número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.
  - Número de servidores web accedidos por minuto.
  - Aparición de animales por unidad de longitud de ruta.
  - Demanda de bicis en una estación BiciMad durante una hora.

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
- Contar $X =$ núm. de veces que ocurre un suceso *en un intervalo* (de tiempo/espacio/unidad de observación), asumiendo:
  1. los sucesos se producen de forma independiente (no “tiene memoria”).
  2. este suceso ocurre en promedio $\lambda > 0$ veces por unidad de observación (por hora, por km,..), siendo este promedio constante.
- **Ejemplos:**
  - Coches que pasan a través de cierto punto durante una hora.
  - Errores ortográficos en una página.
  - Número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.
  - Número de servidores web accedidos por minuto.
  - Aparición de animales por unidad de longitud de ruta.
  - Demanda de bicis en una estación BiciMad durante una hora.

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- **Función de masa de probabilidad:** $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ toma valores $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ con probabilidad:

$$\boxed{P\left(X = k\right) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots}$$

- **Función generadora de momentos y función característica:** Calculando

$$\boxed{M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}} \qquad \boxed{\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}}$$

- **Esperanza y varianza:** Basta hallar las derivadas:

$$\boxed{E[X] = V[X] = \lambda.}$$

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- **Función de masa de probabilidad:** $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ toma valores $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ con probabilidad:

$$\boxed{P\,(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots}$$

- **Función generadora de momentos y función característica:** Calculando

$$\boxed{M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}} \qquad \boxed{\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}}$$

- **Esperanza y varianza:** Basta hallar las derivadas:

$$\boxed{E[X] = V[X] = \lambda.}$$

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

☞ **Ejemplo:** En la centralita de emergencias del 112, tenemos la variable $X =$ "núm. de llamadas de llamadas en una hora", con $X \sim \mathcal{P}(2)$:

1. Probabilidad de no recibir ningún aviso en una hora: como $\lambda = 2$, tenemos

$$P\left(X = 0\right) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 0.1353.$$

Ejemplo: En la centralita de emergencias del 112, tenemos la variable $X =$ "núm. de llamadas de llamadas en una hora", con $X \sim \mathcal{P}(2)$:

1. Probabilidad de no recibir ningún aviso en una hora: como $\lambda = 2$, tenemos
$$P(X = 0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 0.1353.$$
2. Probabilidad de recibir algún aviso en media hora:

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- **Ejemplo:** En la centralita de emergencias del 112, tenemos la variable $X =$ "núm. de llamadas de llamadas en una hora", con $X \sim \mathcal{P}(2)$:
  1. Probabilidad de no recibir ningún aviso en una hora: como $\lambda = 2$, tenemos
  $$P(X = 0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 0.1353.$$
  2. Probabilidad de recibir algún aviso en media hora: vamos a tener un promedio de $\lambda = 2 \times 1/2 = 1$ llamadas por media hora, por lo que $Y \sim \mathcal{P}(1)$ y
  $$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-1} = 0.6321.$$

Ejemplo: En la centralita de emergencias del 112, tenemos la variable $X =$ "núm. de llamadas de llamadas en una hora", con $X \sim \mathcal{P}(2)$:

1. Probabilidad de no recibir ningún aviso en una hora: como $\lambda = 2$, tenemos
$$P(X = 0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 0.1353.$$

2. Probabilidad de recibir algún aviso en media hora: vamos a tener un promedio de $\lambda = 2 \times 1/2 = 1$ llamadas por media hora, por lo que $Y \sim \mathcal{P}(1)$ y
$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-1} = 0.6321.$$

3. ¿Cuantas llamadas se esperan recibir en 8 horas?

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Ejemplo: En la centralita de emergencias del 112, tenemos la variable $X =$ "núm. de llamadas de llamadas en una hora", con $X \sim \mathcal{P}(2)$:

1. Probabilidad de no recibir ningún aviso en una hora: como $\lambda = 2$, tenemos
$$P(X = 0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 0.1353.$$

2. Probabilidad de recibir algún aviso en media hora: vamos a tener un promedio de $\lambda = 2 \times 1/2 = 1$ llamadas por media hora, por lo que $Y \sim \mathcal{P}(1)$ y
$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-1} = 0.6321.$$

3. ¿Cuantas llamadas se esperan recibir en 8 horas? El promedio en 8 horas será de $\lambda = 2 \times 8 = 16$, por lo que $Z \sim \mathcal{P}(16)$ y $E[Z] = 16$.

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- **Ejemplo:** En la centralita de emergencias del 112, tenemos la variable $X =$ "núm. de llamadas de llamadas en una hora", con $X \sim \mathcal{P}(2)$:
  1. Probabilidad de no recibir ningún aviso en una hora: como $\lambda = 2$, tenemos
  $$P\left(X = 0\right) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 0.1353.$$
  2. Probabilidad de recibir algún aviso en media hora: vamos a tener un promedio de $\lambda = 2 \times 1/2 = 1$ llamadas por media hora, por lo que $Y \sim \mathcal{P}(1)$ y
  $$P\left(Y \geq 1\right) = 1 - P\left(Y = 0\right) = 1 - e^{-1} = 0.6321.$$
  3. ¿Cuantas llamadas se esperan recibir en 8 horas? El promedio en 8 horas será de $\lambda = 2 \times 8 = 16$, por lo que $Z \sim \mathcal{P}(16)$ y $E[Z] = 16$.

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

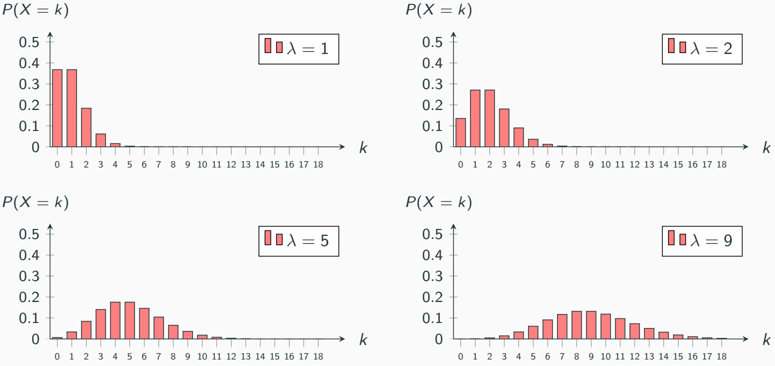


Figura 5: Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ con parámetros $\lambda = 1, 2, 5$ y 9.

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

☞ **Propiedad de la suma:** Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ y $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ son independientes, entonces

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- **Aproximación por Poisson de $\mathcal{B}(n,p)$ con n grande y p pequeña:** Tomando $\boxed{\lambda = np}$, podemos aproximar $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ por una distribución de Poisson $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$:

$$P\left(X = k\right) \approx P\left(Y = k\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

- **Ejemplo:** Número de erratas para un texto de 3500 letras. Supongamos que la probabilidad de que una letra esté mal es de $p = 0.001$. ¿Cuál es la probabilidad de que haya a los sumo 3 erratas? Podemos aproximar por una Poisson con $\lambda = 3500 \times 0.001 = 3.5$:

$$P(X \leq 3) = e^{-3.5}\left(\frac{3.5^0}{0!} + \frac{3.5^1}{1!} + \frac{3.5^2}{2!} + \frac{3.5^3}{3!}\right) = 0.5366.$$

- **Aproximación por Poisson de $\mathcal{B}(n,p)$ con n grande y p pequeña:** Tomando $\boxed{\lambda = np}$, podemos aproximar $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ por una distribución de Poisson $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$:

$$P\left(X = k\right) \approx P\left(Y = k\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

- **Ejemplo:** Número de erratas para un texto de 3500 letras. Supongamos que la probabilidad de que una letra esté mal es de $p = 0.001$. ¿Cuál es la probabilidad de que haya a los sumo 3 erratas? Podemos aproximar por una Poisson con $\lambda = 3500 \times 0.001 = 3.5$:

$$P(X \leq 3) = e^{-3.5}\left(\frac{3.5^0}{0!} + \frac{3.5^1}{1!} + \frac{3.5^2}{2!} + \frac{3.5^3}{3!}\right) = 0.5366.$$

Variable aleatoria de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

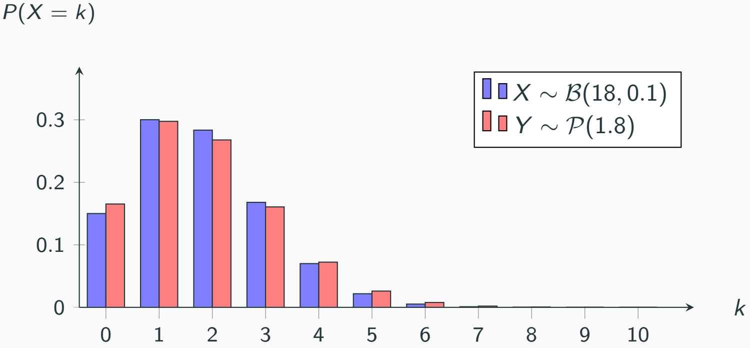


Figura 6: Aproximación de la Binomial $X \sim \mathcal{B}(18, 0.1)$ por una Poisson $Y \sim \mathcal{P}(1.8)$ con $\lambda = np = 18 \times 0.1 = 1.8$.

¡Bola extra!

Ejercicio. Un jugador de la ruleta francesa le gusta apostar al cero (hay 37 casillas que van del cero al 36).

1. Si juega 37 veces ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos veces. Utiliza la distribución binomial y la Poisson y compara los resultados.
   Solución: Prob. 0.2642.
2. Calcula el valor esperado y la varianza de ganar tanto en el caso de la binomial como en el caso de aproximación por la Poisson.
   Solución: $E[X] = V[X] = 1$.
3. Si ha jugado 37 veces y no ha ganado ¿cuál es la probabilidad de que la primera vez que gane es a la cuarentava vez que juega?
   Solución: Prob. 0.02559.

Modelos continuos

Variable aleatoria uniforme continua: $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

- **Notación:** $X \sim \mathcal{U}([a,b])$
- **Noción del "modelo equiprobable" en el caso continuo:** Sea $[a,b]$ un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, donde la densidad de prob. es constante.
- **Función de densidad de probabilidad:** toma valores en $[a,b]$ y

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{longitud}([a,b])} = \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}}$$

- **Ejemplos:**
  - Cortes aleatorios en vigas, varas, cuerdas, etc de longitud ℓ unidades: $X \sim \mathcal{U}([0,\ell])$
  - Tiempos de llegada de un autobús con frecuencia de 15 mins.: $X \sim \mathcal{U}([0,15])$.
  - Nota de un/a estudiante de Estadística que ha llevado el curso al dia: $X \sim \mathcal{U}([8.5,10])$.

Variable aleatoria uniforme continua: $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

- **Notación:** $X \sim \mathcal{U}([a,b])$
- **Noción del "modelo equiprobable" en el caso continuo:** Sea $[a,b]$ un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, donde la densidad de prob. es constante.
- **Función de densidad de probabilidad:** toma valores en $[a,b]$ y

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{longitud}([a,b])} = \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}}$$

- **Ejemplos:**
  - Cortes aleatorios en vigas, varas, cuerdas, etc de longitud ℓ unidades: $X \sim \mathcal{U}([0,\ell])$
  - Tiempos de llegada de un autobús con frecuencia de 15 mins.: $X \sim \mathcal{U}([0,15])$.
  - Nota de un/a estudiante de Estadística que ha llevado el curso al dia: $X \sim \mathcal{U}([8.5,10])$.

Variable aleatoria uniforme continua: $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

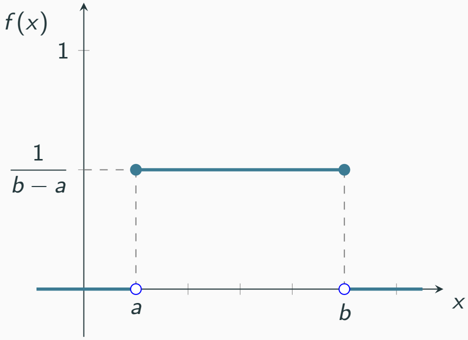


Figura 7: Distribución uniforme en $[a, b]$.

Función de distribución:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{\text{longitud}([a,x])}{\text{longitud}([a,b])} = \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}}$$

Esperanza y varianza: Basta integrar,

$$\boxed{E[X] = \frac{a+b}{2}} \qquad \boxed{V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Fun. gen. de momentos y func. carac.:

$$\boxed{M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}} \qquad \boxed{\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}}$$

Ejercicio: Probar que $f(x)$ está normalizada y obtener las fórmulas anteriores.

Variable aleatoria uniforme continua: $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

Función de distribución:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{\text{longitud}([a,x])}{\text{longitud}([a,b])} = \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}}$$

Esperanza y varianza: Basta integrar,

$$\boxed{E[X] = \frac{a+b}{2}} \qquad \boxed{V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Fun. gen. de momentos y func. carac.:

$$\boxed{M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}} \qquad \boxed{\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}}$$

Ejercicio: Probar que $f(x)$ está normalizada y obtener las fórmulas anteriores.

Ejemplo: $X =$ "tiempo de llegada de un autobús" $\sim \mathcal{U}\big([0,15]\big)$,

$$P\,(0 \leq X \leq x) = \frac{x}{15}, \qquad 0 \leq x \leq 15.$$

Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = P\,(0 \leq X \leq 7.5) = P\,(7.5 \leq X \leq 15) = P\,(3.5 \leq X \leq 11)\,.$$

☞ **Ejemplo:** $X =$ "tiempo de llegada de un autobús" $\sim \mathcal{U}\big([0,15]\big)$,

$$P\,(0 \le X \le x) = \frac{x}{15}, \qquad 0 \le x \le 15.$$

Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = P\,(0 \le X \le 7.5) = P\,(7.5 \le X \le 15) = P\,(3.5 \le X \le 11)\,.$$

$$E[X] = \frac{15}{2} = 7.5, \quad V[X] = \frac{15^2}{12} = 18.75$$

$$M(t) = \frac{e^{t\cdot 15} - e^{t\cdot 0}}{t\cdot 15} = \frac{e^{15t}-1}{15t}, \quad \varphi(t) = \frac{e^{15it}-1}{15it}.$$

Variable aleatoria uniforme continua: $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

☞ **Ejemplo:** $X =$ "tiempo de llegada de un autobús" $\sim \mathcal{U}\big([0,15]\big)$,

$$P\,(0 \leq X \leq x) = \frac{x}{15}, \qquad 0 \leq x \leq 15.$$

Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = P\,(0 \leq X \leq 7.5) = P\,(7.5 \leq X \leq 15) = P\,(3.5 \leq X \leq 11)\,.$$

$$E[X] = \frac{15}{2} = 7.5, \quad V[X] = \frac{15^2}{12} = 18.75$$

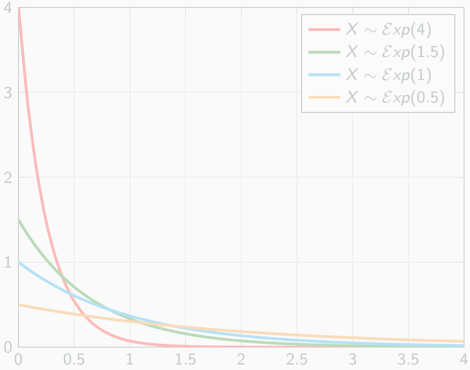
$$M(t) = \frac{e^{t\cdot 15} - e^{t\cdot 0}}{t\cdot 15} = \frac{e^{15t}-1}{15t}, \quad \varphi(t) = \frac{e^{15it}-1}{15it}.$$

Variable aleatoria exponencial: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

- **Notación:** $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$
- **Versión contínua de la geométrica:**
  - $X =$ tiempo *continuo* de espera hasta la primera ocurrencia de un cierto evento, el cual aparece con un promedio de $\lambda > 0$ veces por unidad de tiempo.
- **Ejemplos:**
  - Tiempo de vida de una máquina.
  - Tiempo hasta la aparición de un fallo/avería en componentes electrónicos.
  - Tiempo hasta que ocurra un fenómeno natural (como una erupción o un tornado).
  - Tiempo que pasa un teleoperador con cada cliente.
  - Tiempo de diferencia entre el paso de dos camiones pesados por un puente.

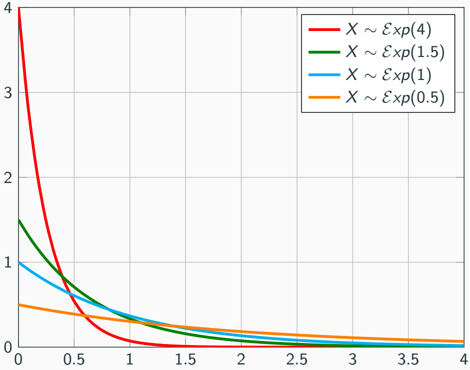
👉 **Función de densidad**: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ toma valores en $x \in [0, +\infty]$ con

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}}$$



👉 **Función de densidad**: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ toma valores en $x \in [0, +\infty]$ con

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}}$$



Variable aleatoria exponencial: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

- **Función de distribución:**

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}}$$

- **"Función de supervivencia":** Esta función da la probabilidad de que el suceso (p.ej. "fallo") no haya aparecido hasta un momento dado,

$$\boxed{S(x) := P\left(X > x\right) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}}$$

Variable aleatoria exponencial: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

☞ **Esperanza y varianza:**

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{\lambda}} \qquad \boxed{V[X] = \frac{1}{\lambda^2}.}$$

☞ **Fun. gen. de momentos y func. carac.:**

$$\boxed{M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}} \qquad \boxed{\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}}$$

Notar que $M(t)$ solo está definida para $t < \lambda$, debido a la convergencia de la integral.

☞ **Ejercicio:** Obtener la fórmula para $F(x)$, $E[X]$, $V[X]$, $M(t)$ y $\varphi(t)$.

- **Ejemplo:** $X =$ "tiempo de vida (en años) de un marcapasos" $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ con vida media de 16 años.
  1. ¿Qué tipo de exponencial sigue X? Tenemos que $16 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$. Por lo que $X \sim \mathcal{E}xp(1/16)$.

Ejemplo: $X =$ "tiempo de vida (en años) de un marcapasos" $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ con vida media de 16 años.

1. ¿Qué tipo de exponencial sigue X? Tenemos que $16 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$. Por lo que $X \sim \mathcal{E}xp(1/16)$.
2. Probabilidad de que haya que cambiarlo entre los primeros 10 y 20 años:

☞ **Ejemplo:** $X =$ "tiempo de vida (en años) de un marcapasos" $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ con vida media de 16 años.

1. ¿Qué tipo de exponencial sigue X? Tenemos que $16 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$. Por lo que $X \sim \mathcal{E}xp(1/16)$.
2. Probabilidad de que haya que cambiarlo entre los primeros 10 y 20 años:

$$P(10 \leq X \leq 20) = F(20) - F(10) = e^{-10/16} - e^{-20/16} = 0.2487.$$

Variable aleatoria exponencial: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

Ejemplo: $X =$ "tiempo de vida (en años) de un marcapasos" $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ con vida media de 16 años.

1. ¿Qué tipo de exponencial sigue X? Tenemos que $16 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$. Por lo que $X \sim \mathcal{E}xp(1/16)$.
2. Probabilidad de que haya que cambiarlo entre los primeros 10 y 20 años:

$$P(10 \leq X \leq 20) = F(20) - F(10) = e^{-10/16} - e^{-20/16} = 0.2487.$$

3. Probabilidad de que el marcapasos dure maś de 20 años:

Ejemplo: $X =$ "tiempo de vida (en años) de un marcapasos" $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ con vida media de 16 años.

1. ¿Qué tipo de exponencial sigue X? Tenemos que $16 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$. Por lo que $X \sim \mathcal{E}xp(1/16)$.
2. Probabilidad de que haya que cambiarlo entre los primeros 10 y 20 años:

$$P\left(10 \leq X \leq 20\right) = F(20) - F(10) = e^{-10/16} - e^{-20/16} = 0.2487.$$

3. Probabilidad de que el marcapasos dure maś de 20 años:

$$P\left(X > 20\right) = 1 - F(20) = S(20) = e^{-20/16} = 0.2865.$$

Variable aleatoria exponencial: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

Ejemplo: $X =$ "tiempo de vida (en años) de un marcapasos" $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ con vida media de 16 años.

1. ¿Qué tipo de exponencial sigue X? Tenemos que $16 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$. Por lo que $X \sim \mathcal{E}xp(1/16)$.
2. Probabilidad de que haya que cambiarlo entre los primeros 10 y 20 años:

$$P\,(10 \leq X \leq 20) = F(20) - F(10) = e^{-10/16} - e^{-20/16} = 0.2487.$$

3. Probabilidad de que el marcapasos dure maś de 20 años:

$$P\,(X > 20) = 1 - F(20) = S(20) = e^{-20/16} = 0.2865.$$

- **Conexión con la Poisson:** si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$,
  - Y cuenta la aparición de un suceso en una unidad de tiempo,
  - $Y_t =$"núm. de veces que aparece el suceso en $[0, t]$"$\sim \mathcal{P}(\lambda t)$, para un $t \geq 0$
  - definiendo $X =$"tiempo hasta la primera ocurrencia":

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(Z \leq t) = 1 - P(Z > t) = 1 - P(Y_t = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}, \\ &\Longrightarrow f_X(t) = F_X'(x) = \lambda e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Es decir, que $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$.

- **Ejercicio:** Rehacer Ejercicio 45-(4) usando la exponencial.

☞ **Conexión con la Poisson:** si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$,

- Y cuenta la aparición de un suceso en una unidad de tiempo,
- $Y_t =$"núm. de veces que aparece el suceso en $[0, t]$"$\sim \mathcal{P}(\lambda t)$, para un $t \geq 0$
- definiendo $X =$"tiempo hasta la primera ocurrencia":

$$\begin{aligned} F_X(t) = P(Z \leq t) = 1 - P(Z > t) = 1 - P(Y_t = 0) \\ = 1 - e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}, \\ \Longrightarrow f_X(t) = F_X'(x) = \lambda e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Es decir, que $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$.

☞ <u>**Ejercicio:**</u> Rehacer Ejercicio 45-(4) usando la exponencial.

Variable aleatoria exponencial: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

Propiedad de "falta de memoria": Si $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, para todos $x_0, x_1 \geq 0$ se tiene:

$$P\left(X > x_0 + x_1 \,|\, X > x_0\right) = P\left(X > x_1\right).$$

Ejemplo: Siguiendo con $X =$ "tiempo de vida (en años) de un marcapasos" $\sim \mathcal{E}xp(1/16)$. Si el marcapasos lleva 5 años funcionando correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que no haya que cambiarlo antes de que pasen otros 15 años?

$$P\left(X > 20 \,|\, X > 5\right) = \frac{P\left(\{X > 20\} \cap \{X > 5\}\right)}{P\left(X > 5\right)} = \frac{P\left(X > 20\right)}{P\left(X > 5\right)}$$

$$= \frac{S(20)}{S(5)} = \frac{e^{-20/16}}{e^{-5/16}} = e^{-15/16} = 0.3916.$$

- **Propiedad de "falta de memoria":** Si $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, para todos $x_0, x_1 \geq 0$ se tiene:

$$P\left(X > x_0 + x_1 \,|\, X > x_0\right) = P\left(X > x_1\right).$$

- **Ejemplo:** Siguiendo con
$X =$ "tiempo de vida (en años) de un marcapasos" $\sim \mathcal{E}xp(1/16)$. Si el marcapasos lleva 5 años funcionando correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que no haya que cambiarlo antes de que pasen otros 15 años?

$$P\left(X > 20 \,|\, X > 5\right) = \frac{P\left(\{X > 20\} \cap \{X > 5\}\right)}{P\left(X > 5\right)} = \frac{P\left(X > 20\right)}{P\left(X > 5\right)}$$
$$= \frac{S(20)}{S(5)} = \frac{e^{-20/16}}{e^{-5/16}} = e^{-15/16} = 0.3916.$$

☞ **Mínimo de dos exponenciales:** Si $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1)$ y $Y \sim \mathcal{E}xp(\lambda_2)$ son independientes, entonces

$$Z = \text{mín}(X, Y) \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Variable aleatoria normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- La más conocida y más usual en todas las Ciencias Naturales y Sociales.
- **Ejemplos:**
  - Alturas/pesos de una población.
  - Errores de medida en experimentos.
  - Precipitaciones y descargas de ríos a largo plazo.
  - ...
- **Función de densidad**: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ es *normal de media* μ *y varianza* $\sigma^2 > 0$ si toma valores en $x \in \mathbb{R}$ con densidad

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Variable aleatoria normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- La más conocida y más usual en todas las Ciencias Naturales y Sociales.
- **Ejemplos:**
  - Alturas/pesos de una población.
  - Errores de medida en experimentos.
  - Precipitaciones y descargas de ríos a largo plazo.
  - ...
- **Función de densidad**: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ es *normal de media* μ *y varianza* $\sigma^2 > 0$ si toma valores en $x \in \mathbb{R}$ con densidad

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Variable aleatoria normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

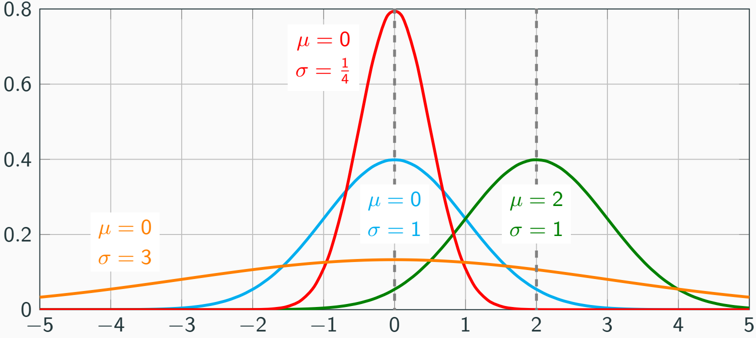


Figura 8: Las distribuciones normales $\mathcal{N}(0, 1)$, $\mathcal{N}(2, 1)$, $\mathcal{N}(0, 1/2)$ y $\mathcal{N}(0, 3)$.

- Vamos a estudiar primero la normal tipificada con $\mu = 0$, $\sigma = 1$:

$$\boxed{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

- **Función de densidad:**

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz, \qquad z \in \mathbb{R}.}$$

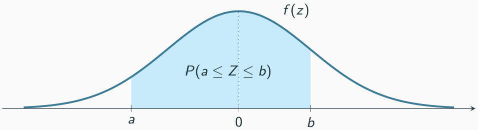
Variable aleatoria normal tipificada: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

- Vamos a estudiar primero la normal tipificada con $\mu = 0$, $\sigma = 1$:

$$\boxed{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

- **Función de densidad:**

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz, \qquad z \in \mathbb{R}.}$$



Propiedades de $f(z)$:

1. $f(z)$ es par, es decir simétrica con respecto a $z = 0$.
2. tiene máximos en $z = 0$ y puntos de inflexión en $z = \pm 1$.

Fun. gen. de momentos y func. carac.:

$$\boxed{M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}} \qquad \boxed{\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

(Calculadas en el Ejercicio 42)

Notar que $M(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Variable aleatoria normal tipificada: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

- **Propiedades de $f(z)$:**
  1. $f(z)$ es par, es decir simétrica con respecto a $z = 0$.
  2. tiene máximos en $z = 0$ y puntos de inflexión en $z = \pm 1$.

- **Fun. gen. de momentos y func. carac.:**

$$\boxed{M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}} \qquad \boxed{\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

(Calculadas en el Ejercicio 42)

Notar que $M(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

- **Esperanza y varianza:** Calculando $M'(0)$ y $M''(0)$ a partir de lo anterior o mediante integrales,

$$\boxed{E[Z] = 0} \qquad \boxed{V[Z] = 1.}$$

Variable aleatoria normal tipificada: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

☞ **Propiedades de $f(z)$:**

1. $f(z)$ es par, es decir simétrica con respecto a $z = 0$.
2. tiene máximos en $z = 0$ y puntos de inflexión en $z = \pm 1$.

☞ **Fun. gen. de momentos y func. carac.:**

$$\boxed{M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}} \qquad \boxed{\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

(Calculadas en el Ejercicio 42)

Notar que $M(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

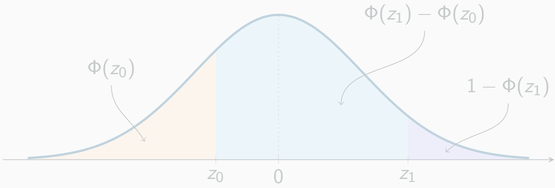
☞ **Esperanza y varianza:** Calculando $M'(0)$ y $M''(0)$ a partir de lo anterior o mediante integrales,

$$\boxed{E[Z] = 0} \qquad \boxed{V[Z] = 1.}$$

- **Función de distribución:** No existe primitiva conocida de esta función de densidad, debemos usar tablas con aproximaciones numéricas:

$$\boxed{\Phi(z_0) := P\left(Z \leq z_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx}$$

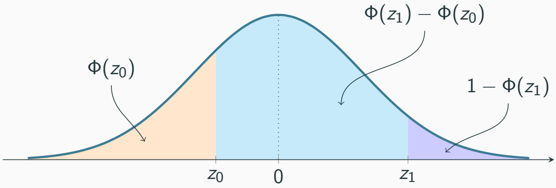
- **Cálculo:** Para $z_0 < z_1$ reales, tenemos:
  1. $P(z_0 \leq Z \leq z_1) = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$.
  2. $P(Z \geq z_1) = 1 - \Phi(z_1) = \Phi(-z_1)$.



- **Función de distribución:** No existe primitiva conocida de esta función de densidad, debemos usar tablas con aproximaciones numéricas:

$$\boxed{\Phi(z_0) := P\left(Z \leq z_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx}$$

- **Cálculo:** Para $z_0 < z_1$ reales, tenemos:
  1. $P(z_0 \leq Z \leq z_1) = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$.
  2. $P(Z \geq z_1) = 1 - \Phi(z_1) = \Phi(-z_1)$.



- La tabla solo nos marca $\Phi(z_0)$ para z_0 positivos....¡podemos usar las simetrías de la normal!

- **Ejemplo:** Dada $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, calculamos usando la tabla de la normal tipificada:
  - $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.9332 - 0.5 = 0.4332.$
  - $P(-1.2 \leq X \leq 1.2)$

- La tabla solo nos marca $\Phi(z_0)$ para z_0 positivos....¡podemos usar las simetrías de la normal!

- **Ejemplo:** Dada $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, calculamos usando la tabla de la normal tipificada:
  - $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.9332 - 0.5 = 0.4332.$
  - $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2 \times P(0 \leq X \leq 1.2) = 2 \times (\Phi(1.2) - \Phi(0)) = 2 \times (0.8849 - 0.5) = 0.7698.$
  - $P(X \leq -1.85)$

- La tabla solo nos marca $\Phi(z_0)$ para z_0 positivos....¡podemos usar las simetrías de la normal!
- **Ejemplo:** Dada $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, calculamos usando la tabla de la normal tipificada:
    - $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.9332 - 0.5 = 0.4332.$
    - $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2 \times P(0 \leq X \leq 1.2) = 2 \times (\Phi(1.2) - \Phi(0)) = 2 \times (0.8849 - 0.5) = 0.7698.$
    - $P(X \leq -1.85) = 1 - P(X \leq 1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 1 - 0.9678 = 0.0322.$

Variable aleatoria normal tipificada: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

- La tabla solo nos marca $\Phi(z_0)$ para z_0 positivos....¡podemos usar las simetrías de la normal!

- **Ejemplo:** Dada $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, calculamos usando la tabla de la normal tipificada:
  - $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.9332 - 0.5 = 0.4332$.
  - $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2 \times P(0 \leq X \leq 1.2) = 2 \times (\Phi(1.2) - \Phi(0)) = 2 \times (0.8849 - 0.5) = 0.7698$.
  - $P(X \leq -1.85) = 1 - P(X \leq 1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 1 - 0.9678 = 0.0322$.

- **Normal general:** Cualquier otra normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ se puede tipificar a una $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ por traslación y escalado.

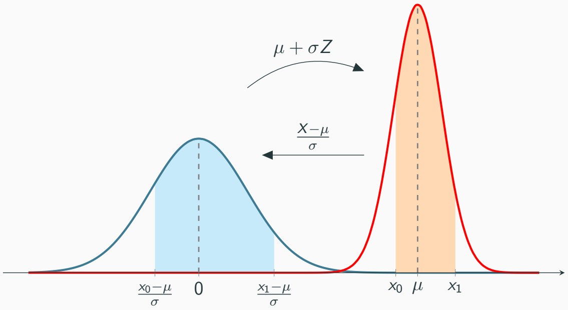


Figura 9: Tipificación de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- **Teorema:** Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces $\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)}$.

- Del mismo modo, si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces $X = \mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

- **Normal general:** Cualquier otra normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ se puede tipificar a una $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ por traslación y escalado.

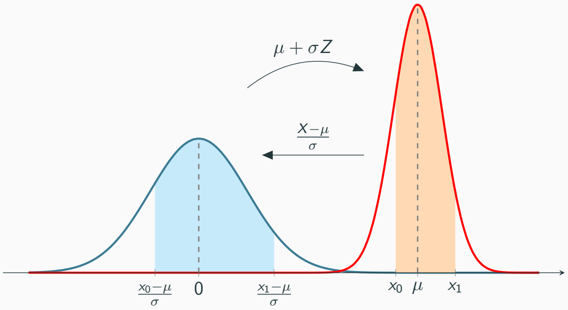


Figura 9: Tipificación de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ a $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- **Teorema:** Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces $\boxed{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)}$.

- Del mismo modo, si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces $X = \mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Ejemplo: Dada $X \sim \mathcal{N}(80, 10)$, podemos tipificar $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-80}{10}$ y leemos en la tabla para calcular:

- $P\left(X \leq 90\right) = P\left(X - 80 \leq 90 - 80\right) = P\left(\frac{X-80}{10} \leq \frac{90-80}{10}\right) = P\left(Z \leq 1\right) = \Phi(1) = 0.8413.$
- $P(65 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{65-80}{10} \leq \frac{X-80}{10} \leq \frac{100-80}{10}\right) = P(-1.5 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1.5)) = 0.9772 - (1 - 0.9332) = 0.9104$

☞ **Ejercicio 41:** Dado X una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$, calcular

1. $P(0 \leq X \leq 1.5)$
2. $P(-1.2 \leq X \leq 1.2)$
3. $P(X \leq -1.85)$
4. $P(X \geq 1.96)$
5. $P(|X| \geq 1.65)$
6. $P(-1.2 \leq X \leq 2.1)$
7. $P(X \leq 1.66)$
8. $P(|X| \leq 1.47)$
9. $P(|X| = 1.47)$

☞ **Ejercicio 41:** Dado X una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$, calcular

1. $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.4332.$
2. $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2P(0 \leq X \leq 1.2) = 0.7698.$
3. $P(X \leq -1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 0.0322.$
4. $P(X \geq 1.96)$
5. $P(|X| \geq 1.65)$
6. $P(-1.2 \leq X \leq 2.1)$
7. $P(X \leq 1.66)$
8. $P(|X| \leq 1.47)$
9. $P(|X| = 1.47)$

☞ **Ejercicio 41:** Dado X una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$, calcular

1. $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.4332$.
2. $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2P(0 \leq X \leq 1.2) = 0.7698$.
3. $P(X \leq -1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 0.0322$.
4. $P(X \geq 1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 0.025$.
5. $P(|X| \geq 1.65)$
6. $P(-1.2 \leq X \leq 2.1)$
7. $P(X \leq 1.66)$
8. $P(|X| \leq 1.47)$
9. $P(|X| = 1.47)$

☞ **Ejercicio 41:** Dado X una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$, calcular

1. $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.4332$.
2. $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2P(0 \leq X \leq 1.2) = 0.7698$.
3. $P(X \leq -1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 0.0322$.
4. $P(X \geq 1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 0.025$.
5. $P(|X| \geq 1.65) = 2P(X \leq -1.65) = 0.099$
6. $P(-1.2 \leq X \leq 2.1)$
7. $P(X \leq 1.66)$
8. $P(|X| \leq 1.47)$
9. $P(|X| = 1.47)$

☞ **Ejercicio 41:** Dado X una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$, calcular

1. $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.4332$.
2. $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2P(0 \leq X \leq 1.2) = 0.7698$.
3. $P(X \leq -1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 0.0322$.
4. $P(X \geq 1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 0.025$.
5. $P(|X| \geq 1.65) = 2P(X \leq -1.65) = 0.099$
6. $P(-1.2 \leq X \leq 2.1) = 0.867$.
7. $P(X \leq 1.66)$
8. $P(|X| \leq 1.47)$
9. $P(|X| = 1.47)$

☞ **Ejercicio 41:** Dado X una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$, calcular

1. $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.4332.$
2. $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2P(0 \leq X \leq 1.2) = 0.7698.$
3. $P(X \leq -1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 0.0322.$
4. $P(X \geq 1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 0.025.$
5. $P(|X| \geq 1.65) = 2P(X \leq -1.65) = 0.099$
6. $P(-1.2 \leq X \leq 2.1) = 0.867.$
7. $P(X \leq 1.66) = \Phi(1.66) = 0.9515.$
8. $P(|X| \leq 1.47)$
9. $P(|X| = 1.47)$

Ejercicio 41: Dado X una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$, calcular

1. $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.4332$.
2. $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2P(0 \leq X \leq 1.2) = 0.7698$.
3. $P(X \leq -1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 0.0322$.
4. $P(X \geq 1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 0.025$.
5. $P(|X| \geq 1.65) = 2P(X \leq -1.65) = 0.099$
6. $P(-1.2 \leq X \leq 2.1) = 0.867$.
7. $P(X \leq 1.66) = \Phi(1.66) = 0.9515$.
8. $P(|X| \leq 1.47) = 0.8584$.
9. $P(|X| = 1.47)$

☞ **Ejercicio 41:** Dado X una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$, calcular

1. $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.4332$.
2. $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2P(0 \leq X \leq 1.2) = 0.7698$.
3. $P(X \leq -1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 0.0322$.
4. $P(X \geq 1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 0.025$.
5. $P(|X| \geq 1.65) = 2P(X \leq -1.65) = 0.099$
6. $P(-1.2 \leq X \leq 2.1) = 0.867$.
7. $P(X \leq 1.66) = \Phi(1.66) = 0.9515$.
8. $P(|X| \leq 1.47) = 0.8584$.
9. $P(|X| = 1.47) = 0$.

Variable aleatoria normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

☞ **Ejercicio 42:** Sea X una variable aleatoria $\mathcal{N}(80, 10)$. Calcule:

1. $P(X \leq 90)$
2. $P(X \leq 80)$
3. $P(X = 80)$
4. $P(65 \leq X \leq 100)$
5. $P(70 \leq X)$
6. $P(|X - 80| \leq 19.6)$

Variable aleatoria normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Ejercicio 42: Sea X una variable aleatoria $\mathcal{N}(80, 10)$. Calcule:

1. $P(X \leq 90) = \Phi(1) = 0.8413.$
2. $P(X \leq 80) = \Phi(0) = 0.5$
3. $P(X = 80)$
4. $P(65 \leq X \leq 100)$
   $= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9104$
5. $P(70 \leq X)$
6. $P(|X - 80| \leq 19.6)$

👉 **Ejercicio 42:** Sea X una variable aleatoria $\mathcal{N}(80, 10)$. Calcule:

1. $P(X \leq 90) = \Phi(1) = 0.8413.$
2. $P(X \leq 80) = \Phi(0) = 0.5$
3. $P(X = 80) = 0$
4. $P(65 \leq X \leq 100)$
   $= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9104$
5. $P(70 \leq X)$
6. $P(|X - 80| \leq 19.6)$

Ejercicio 42: Sea X una variable aleatoria $\mathcal{N}(80, 10)$. Calcule:

1. $P(X \leq 90) = \Phi(1) = 0.8413.$
2. $P(X \leq 80) = \Phi(0) = 0.5$
3. $P(X = 80) = 0$
4. $P(65 \leq X \leq 100)$
   $= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9104$
5. $P(70 \leq X) = \Phi(1) = 0.8413$
6. $P(|X - 80| \leq 19.6)$

Ejercicio 42: Sea X una variable aleatoria $\mathcal{N}(80, 10)$. Calcule:

1. $P(X \leq 90) = \Phi(1) = 0.8413.$
2. $P(X \leq 80) = \Phi(0) = 0.5$
3. $P(X = 80) = 0$
4. $P(65 \leq X \leq 100)$
   $= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9104$
5. $P(70 \leq X) = \Phi(1) = 0.8413$
6. $P(|X - 80| \leq 19.6) =$?

Ejercicio 42: Sea X una variable aleatoria $\mathcal{N}(80, 10)$. Calcule:

1. $P(X \leq 90) = \Phi(1) = 0.8413.$
2. $P(X \leq 80) = \Phi(0) = 0.5$
3. $P(X = 80) = 0$
4. $P(65 \leq X \leq 100)$
   $= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9104$
5. $P(70 \leq X) = \Phi(1) = 0.8413$
6. $P(|X - 80| \leq 19.6) =$?

$$
\begin{aligned}
P(|X - 80| \leq 19.6) &= P\left(\left|\frac{X - 80}{10}\right| \leq 1.96\right) \\
&= P\left(|Z| < 1.96\right) \\
&= 2\Phi(1.96) - 1 \\
&= 0.95.
\end{aligned}
$$

Variable aleatoria normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

☞ **Propiedades "gratis" de la tipificación:** Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, se tiene:

1. La función de densidad $f(x)$ es simétrica con respecto a la recta $x = \mu$, donde además tiene un máximo. También tiene dos puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$.

2. **Esperanza y varianza:** $\boxed{E[X] = \mu \text{ y } V[X] = \sigma^2}$.

3. **Función generadora de momentos y función característica:**

$$\boxed{M(t) = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}, \qquad \boxed{\varphi(t) = e^{i\mu t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}.$$

   Y ambas funciones existen para todo $t \in \mathbb{R}$.

Variable aleatoria normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

☞ **Propiedades "gratis" de la tipificación:** Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, se tiene:

1. La función de densidad $f(x)$ es simétrica con respecto a la recta $x = \mu$, donde además tiene un máximo. También tiene dos puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$.

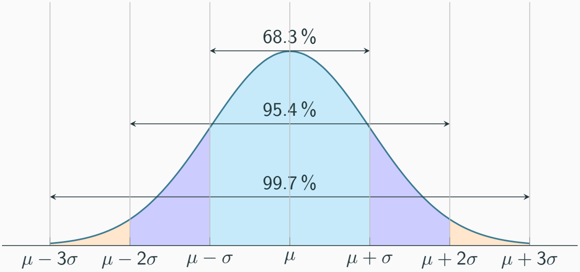
2. **Esperanza y varianza:** $\boxed{E[X] = \mu \text{ y } V[X] = \sigma^2}$.

3. **Función generadora de momentos y función característica:**

$$\boxed{M(t) = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}, \qquad \boxed{\varphi(t) = e^{i\mu t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}.$$

   Y ambas funciones existen para todo $t \in \mathbb{R}$.

- **Agrupamiento central de probabilidades:** tomando intervalos con centro μ y radios siendo múltiplos de σ,
  1. $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) \approx 0.683$.
  2. $P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \approx 0.954$.
  3. $P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) \approx 0.997$.



Notar: estos resultados mejoran con creces las cotas obtenidas mediante la Desigualdad de Chebyshev.

Variable aleatoria normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Transformaciones y sumas de normales:

1. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ y definimos $Y = aX + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a\sigma).$$

2. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ independientes, entonces

$$X + Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right).$$

Propiedad aditiva de las normales: En general, si X_1, X_2, ..., X_n son independientes y normales con $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k)$ y $a_0, \ldots, a_n$ son unos números reales, entonces la variable aleatoria

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

sigue una distribución

$$Y \sim \mathcal{N}\left(a_0 + a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n, \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + {a_n}^2\sigma_n^2}\right).$$

Variable aleatoria normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- **Transformaciones y sumas de normales:**
  1. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ y definimos $Y = aX + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$, entonces
  $$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a\sigma).$$
  2. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ independientes, entonces
  $$X + Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right).$$
- **Propiedad aditiva de las normales:** En general, si X_1, X_2, ..., X_n son independientes y normales con $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k)$ y $a_0, \ldots, a_n$ son unos números reales, entonces la variable aleatoria
$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$
sigue una distribución
$$Y \sim \mathcal{N}\left(a_0 + a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n, \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n{}^2\sigma_n^2}\right).$$

- **Ejemplo:** Si $X_1 \sim \mathcal{N}(1,1),\ X_2 \sim \mathcal{N}(3,3),\ X_3 \sim \mathcal{N}(4,3)$ independientes y definimos $Y = X_1 + 3X_2 - X_3$.
  - Tenemos una normal $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ con:

$$\mu_Y = E[Y] = E[X_1] + 3E[X_2] - E[X_3] = 1 + 9 - 4 = 6.$$
$$\sigma_Y^2 = V[Y] = V[X_1] + 3^2 V[X_2] + (-1)^2 V[X_3] = 1 + 9 \times 4 + 9 = 46.$$

Por lo que $Y \sim \mathcal{N}(6, \sqrt{46}) = \mathcal{N}(6, 6.78)$.

👉 **Ejemplo:** Si $X_1 \sim \mathcal{N}(1,1),\ X_2 \sim \mathcal{N}(3,3),\ X_3 \sim \mathcal{N}(4,3)$ independientes y definimos $Y = X_1 + 3X_2 - X_3$.

- Tenemos una normal $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ con:

$$\mu_Y = E[Y] = E[X_1] + 3E[X_2] - E[X_3] = 1 + 9 - 4 = 6.$$
$$\sigma_Y^2 = V[Y] = V[X_1] + 3^2 V[X_2] + (-1)^2 V[X_3] = 1 + 9 \times 4 + 9 = 46.$$

Por lo que $Y \sim \mathcal{N}(6, \sqrt{46}) = \mathcal{N}(6, 6.78)$.

- $P(Y > 4) = P\left(\frac{Y-6}{6.78} > \frac{4-6}{6.78}\right) = P(Z > -0.295) \overset{\text{sime.}}{=}$
$\Phi(0.295) \approx \frac{\Phi(0.29) + \Phi(0.30)}{2} = 0.616.$

Ejemplo: Si $X_1 \sim \mathcal{N}(1,1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(3,3)$, $X_3 \sim \mathcal{N}(4,3)$ independientes y definimos $Y = X_1 + 3X_2 - X_3$.

- Tenemos una normal $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ con:

$$\mu_Y = E[Y] = E[X_1] + 3E[X_2] - E[X_3] = 1 + 9 - 4 = 6.$$
$$\sigma_Y^2 = V[Y] = V[X_1] + 3^2 V[X_2] + (-1)^2 V[X_3] = 1 + 9 \times 4 + 9 = 46.$$

Por lo que $Y \sim \mathcal{N}(6, \sqrt{46}) = \mathcal{N}(6, 6.78)$.

- $P\left(Y > 4\right) = P\left(\frac{Y-6}{6.78} > \frac{4-6}{6.78}\right) = P\left(Z > -0.295\right) \overset{\text{sime.}}{=}$ $\Phi(0.295) \approx \frac{\Phi(0.29) + \Phi(0.30)}{2} = 0.616.$

Teorema Central del Límite

Pregunta: ¿Cómo se comporta la suma o el "promedio" de una sucesión grande de variables aleatorias

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

- **independientes**,
- con misma **distribución** ?

(P.ej, repetir un mismo experimento muchas veces)

La tabla de Galton: https://www.youtube.com/watch?v=8AD7b7_HNak

Teorema Central del Límite

- **Pregunta:** ¿Cómo se comporta la suma o el "promedio" de una sucesión grande de variables aleatorias

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

  - **independientes**,
  - con misma **distribución** ?

  (P.ej, repetir un mismo experimento muchas veces)

- La tabla de Galton: https://www.youtube.com/watch?v=8AD7b7_HNak

- **Teorema Central del Límite:** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una sucesión de v.a.i.i.d. con media $E[X_i] = \mu$ y varianza $V[X_i] = \sigma^2 > 0$ finitas. Se tiene que:

$$P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(t), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

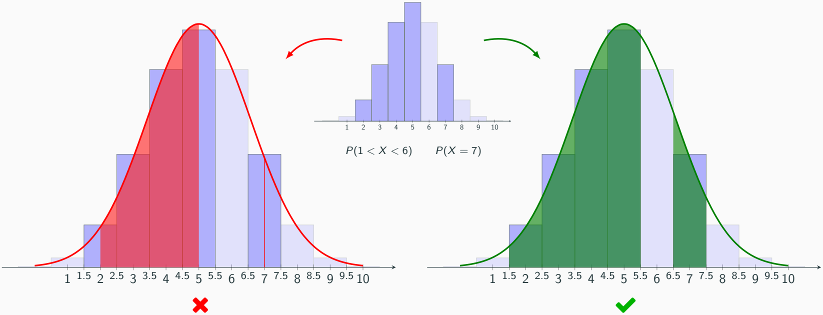
donde $\Phi(t)$ es la función de distribución de la normal tipificada $\mathcal{N}(0,1)$. Equivalentemente,

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(t), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

- **Notar:** no hemos supuesto ¡nada! sobre como las X_i están distribuidas excepto que tienen la misma distribución (la que sea), que son variables independientes y que tienen media μ y varianza σ^2 finitas.

La corrección de Yates

👉 **La corrección de Yates:** Aproximando una v.a. discreta X por una contínua Y.



$$P(1 < X < 6) \approx P(2 \le Y \le 5)$$
$$P(X = 7) \approx P(Y = 7) = 0$$

$$P(1 < X < 6) \approx P(1.5 \le Y \le 5.5)$$
$$P(X = 7) \approx P(6.5 \le Y \le 7.5)$$

¡Bola extra!

Ejercicio. Gente estudiosa de Ingenieria Civil va a construir un puente y determinan que la cantidad de peso (en toneladas) que un cierto paso de este puente puede resistir sin sufrir daño estructural sigue una distribución normal de media 400 y varianza 1600.

1. Asumiendo que el peso (en toneladas) de un coche puede considerarse una variable aleatoria de media 3 y varianza de 0.09 y que los pesos de dos coches son independientes, ¿cuántos coches deberían estar en el paso del puente al mismo tiempo para que la probabilidad de daño estructural exceda el 10 %?
2. Se quiere transportar durante la noche varias piezas de aerogeneradores para un parque eólico al otro lado del puente. Cada convoy pesa un total del de 65 toneladas y aparecen de forma independiente en el paso del puente, donde coinciden un promedio de 3 convoys al mismo tiempo. Asumiendo que no pasan otros vehículos de noche, ¿cuál es la probabilidad de que pasen entre 5 y 7 convoys y eso provoque daño estructural?