MAT101 – S1 IMA Gr. I

Devoir sur table - 02 déc. 2016

Durée : 1h

Documents interdits

Chaque réponse devra être justifiée et rédigée de manière rigoureuse. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront dans l'appréciation des copies.

Notation : Pendant tout le sujet, i dénote l'unité imaginaire, c.-à-d. $i \in \mathbb{C}$ vérifiant $i^2 = -1$.

Question de cours. Démontrer la Formule de Moivre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ (\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx).$$

Exercice 1. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan affine $\mathscr{P}$.

(a) Vérifier que les points A, B, C données en coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$A : (-2, 1),\ B : (1, 2) \text{ et } C : (-5, 0)$$

sont alignées.

(b) Donner les équations paramétriques et l'équation implicite de la droite $\mathscr{D}$ passant par A, B, C.

(c) Soit $\mathscr{D}'$ la droite dans le plan affine définie en $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par :

$$\mathscr{D}' : \begin{cases} x = 2 - 3\mu \\ y = 3 + 2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Déterminer si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes, parallèles ou confondues. Donner le point d'intersection en coordonnées dans le cas ou elles sont sécantes.

Exercice 2. Soit $w = 7 - 24i \in \mathbb{C}$:

(a) Montrer que le module de w est 25.

(b) Calculer les racines carrés de w.

(c) En déduire les solutions complexes de l'équation :

$$z^2 - (2 - i)z - 1 + 5i = 0$$

Exercice 3.

(a) Soit x différent de 0 et 1. Pour $p \leq q$ des entiers relatives, donner sans démonstration la valeur de la somme :

$$\sum_{k=p}^{q} x^k.$$

(b) En déduire l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{23} e^{i\pi k/6} = 0.$$

$\boxed{\text{DS II } 02/12}$

QUESTION DE COURS

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$(\cos(x)+i\sin(x))^n = (e^{ix})^n \quad , \text{ par déf. d'exponentielle complexe.}$$
$$= e^{i(nx)}$$
$$= \cos(nx)+i\sin(nx) \text{ , aussi par déf.}$$

D'où, la Formule de Moivre.

Ex 1

$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$.

a) $A:(-2,1)$, $B:(1,2)$, $C:(-5,0)$ ds $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Prenons les vecteurs associés :

$\vec{AB} : (1-(-2), 2-1) = (3,1)$ coord. ds $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

$\vec{AC} : (-5-(-2), 0-1) = (-3,-1)$

On sait que : A, B, C alignés $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ colinéaires.

On voit que $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$ avec $\lambda = -1$, d'où colinéaires (on peut aussi obtenir la colinéarité à partir du déterminant : $\mathrm{Det}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{AB},\vec{AC})$
$= 3(-1)-(-3)\cdot 1$
$= 0$.)

b) La droite $\mathcal{D} = \{A+\lambda\vec{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$:

*) Eqs. paramétriques :

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = -2+3\lambda \\ y = 1+\lambda \end{cases} \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$$

*) Eq. implicite : soit $M:(x,y)$ générique. $\Rightarrow \vec{AM} = (x-x_A, y-y_A)$
$= (x+2, y-1)$

$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{AB}$ colinéaires

$\Leftrightarrow \mathrm{Det}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{AM},\vec{AB}) = 0$

$\Leftrightarrow 0 = (x+2)\cdot 1 - (y-1)\cdot 3 = x-3y+2+3 = x-3y+5$

$\Leftrightarrow \boxed{x-3y+5=0}$

(Aussi, à partir des éqs. param : $\begin{cases} \lambda = \frac{x+2}{3} \\ \lambda = y-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{3} = y-1$
$\Leftrightarrow x+2 = 3y-3 \Leftrightarrow \boxed{x-3y+5=0}$).

c) $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 2-3\mu \\ y = 3+2\mu \end{cases}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

On remarque que $\mathcal{D}$ a comme vect. directeur $u = \overrightarrow{AB} : (3,1)$.
$\mathcal{D}'$ a " —— " —— " $v : (-3,2)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $Det_{(\vec{i},\vec{j})}(u,v) = 3\cdot 2-(-3)\cdot 1 = 9 \neq 0$.

D'où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ secantes. Cherchons $P = \mathcal{D}\cap\mathcal{D}'$:

•) <u>1ère méthode</u> (plus rapide)

On utilise l'éq implicite de $\mathcal{D}$ et la param. de $\mathcal{D}'$:

$$\begin{cases} x-3y+5=0 \\ x = 2-3\mu \\ y = 3+2\mu \end{cases}, \mu\in\mathbb{R} \Rightarrow (2-3\mu)-3(3+2\mu)+5=0$$
$$\Leftrightarrow 2-9+5-3\mu-6\mu=0$$
$$\Leftrightarrow -9\mu = 2 \Leftrightarrow \boxed{\mu = -\frac{2}{9}}$$

D'où, $P : (2-3(-\frac{2}{9}), 3+2(-\frac{2}{9})) = (\frac{24}{9}, \frac{23}{9})$.

•) <u>2ème méthode</u>

À partir des éqs. paramétriques:

$$\begin{cases} -2+3\lambda = 2-3\mu \\ 1+\lambda = 3+2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda+3\mu = 4 \\ \lambda-2\mu = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \lambda &= \frac{14}{9} \\ \mu &= -\frac{2}{9} \end{aligned}}$$

D'où: $\boxed{P : (24/9, 23/9)}$.

Ex 2

$w = 7-24i \in \mathbb{C}$.

a) $|w| = \sqrt{7^2+24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$.

b) On doit trouver $z\in\mathbb{C}$ t.q. $z^2 = w = 25$.

En forme exponentielle:

$z = \rho e^{i\theta}$, $\rho\in\mathbb{R}_+$, $\theta\in\mathbb{R}$ et $w : \begin{cases} |w| = 25 \\ \arg(w) = \theta_0 \text{ t.q. } \begin{cases} \cos\theta_0 = \frac{Re(w)}{|w|} = \frac{7}{25} \\ \sin\theta_0 = \frac{Im(w)}{|w|} = -\frac{24}{25} \\ \theta_0 \in]-\pi;\pi] \end{cases} \end{cases}$

Identifions:

$$z^2 = w \Leftrightarrow \rho^2 e^{i2\theta} = 25 \cdot e^{i\theta_0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 25 \\ \text{et} \\ 2\theta = \theta_0 + 2k\pi,\ k=0,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{25} = 5 \\ \theta = \frac{\theta_0}{2} + k\pi,\ k=0,1 \end{cases}$$

Deux racines :

$$z_1 = 5 \cdot e^{i\theta_0/2} \quad \text{et} \quad z_2 = 5 \cdot e^{i\theta_0/2 + \pi} = 5 \cdot e^{i\theta_0/2} \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} = -5 e^{i\theta_0/2}$$

Calculons, en utilisant la formule de l'angle moitié :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_0 = \frac{7}{25} > 0 \\ \sin\theta_0 = \frac{-24}{25} < 0 \\ \theta \in]-\pi ; \pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_0 \in]-\tfrac{\pi}{2} ; 0[\Rightarrow \frac{\theta_0}{2} \in]-\tfrac{\pi}{4} ; 0[.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\frac{\theta_0}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta_0}{2}} = -\sqrt{\frac{1-7/25}{2}} = -\sqrt{\frac{25-7}{2\cdot 25}} = -\frac{3}{5} \\ \cos\frac{\theta_0}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\theta_0}{2}} = \sqrt{\frac{1+7/25}{2}} = \sqrt{\frac{25+7}{2\cdot 25}} = \frac{4}{5}. \end{array}\right.$$

D'où :

$$\boxed{z_1 = 5 \cdot e^{i\theta_0/2} = 5 \cdot (\cos(\tfrac{\theta_0}{2}) + i \sin(\tfrac{\theta_0}{2})) = 4 - 3i}$$

$$\boxed{z_2 = -4 + 3i}.$$

c) $z^2 - (2-i)z - 1 + 5i = 0$ $\quad \left(az^2 + bz + c = 0 \text{ avec } \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -(2-i) \\ c = (-1+5i) \end{array} \right)$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (2-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1+5i)$

$$= 4 - 4i - 1 + 4 - 20i = 7 - 24i \in \mathbb{C}.$$

On cherche les racines de Δ... par (b), c'est $\begin{array}{l} \delta_1 = 4 - 3i \\ \delta_2 = -4 + 3i \end{array}$!

D'où ; les solutions de l'éq :

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a} = \frac{+2 - i \pm (4 - 3i)}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z_1 = 3 - 2i \\ z_2 = -1 + i \end{array}}$$

$\boxed{\text{Ex 3}}$ (a) $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}$.

(b) $$\sum_{k=0}^{23} e^{\frac{i\pi k}{6}} = \sum_{k=0}^{23} \left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^k = \left[\begin{array}{l} \text{FORMULE SÉRIE GÉOMÉTRIQUE} \\ x \neq 0,1 : \displaystyle\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x} \end{array} \right]$$

$$= \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^0 - \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{24}}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1 - e^{i\frac{24}{6}\pi}}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1 - e^{i4\pi}}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1-1}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}} = 0.$$