MAT101 – S1 IMA Gr. I

Devoir sur table - 14 oct. 2016

Durée : 1h

Documents interdits

Chaque réponse devra être justifiée et rédigée de manière rigoureuse. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront dans l'appréciation des copies.

Question de cours. Soient E et F des ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

(a) Définir le domaine de définition de f. Quand est-ce qu'on dit que f est une application ?

(b) Soit $g : E \to F$ une fonction. Quand est-ce qu'on dit que les fonctions f et g sont égales ?

Exercice 1. Soient A et B des assertions. Rappelons que $\neg A$ désigne la négation de A.

(a) Décrire la table de vérité pour l'assertion $\neg(A \Rightarrow B)$.

(b) Décrire la table de vérité pour l'assertion $A \wedge (\neg B)$.

(c) Que constatez-vous ? Que peut-on dire de l'assertion

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge (\neg B)) \text{ ?}$$

(d) En déduire la négation, en termes de quantificateurs et connecteurs logiques, de l'assertion suivante :

“ Pour tout nombre entier naturel, si $6|n$ alors $(2|n$ et $3|n)$ ”.

Exercice 2. Soient E et F des ensembles.

(a) Soient des parties $A, B, C \subset E$. Trouver un contre-exemple à l'assertion suivante :

$$A \subset B \subset C \Longrightarrow (C \setminus B) \setminus A = C \setminus (B \setminus A)$$

(Indication : prendre $E = \mathbb{N}$ et A, B, C finis.)

(b) Soient des parties $A', B' \subset F$ et soit $f : E \to F$ une application. Montrez que :

$$A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B').$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = |x+1| - |x-1|$. Par disjonction de cas, donner une expression plus explicite de f et démontrer qu'elle est une fonction impaire.

DS 14/10

Question cours

E, F ensembles, $f : E \to F$ fonction.

a) le domaine de définition de f est la partie de E :

$$\mathcal{D}_f = \{x \in E \mid \exists y \in F : y = f(x)\}$$

On dit que f est une application si $E = \mathcal{D}_f$.

b) $g : E \to F$. On dit que $f = g$ si $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ et $\forall x \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g : f(x) = g(x)$.

Exo 1

A, B assertions.

a) Table de vérité de $\neg(A \Rightarrow B)$:

(Rappelons que $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$)

A	B	$\neg A$	$(A \Rightarrow B)$	$\neg(A \Rightarrow B)$
V	V	F	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F

b) Table de vérité de $A \wedge (\neg B)$:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

c) On constate que $\neg(A \Rightarrow B)$ vraie $\Leftrightarrow$ $(A \wedge (\neg B))$ vraie, donc $(A \Rightarrow B)$ équivaut à $(A \wedge (\neg B))$ et l'assertion

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge (\neg B))$$

est vraie.

d) On exprese d'abord l'assertion en termes de quantificateurs et de connecteurs logiques:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 6|n \Rightarrow (2|n) \wedge (3|n)$$

D'où, sa négation:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : 6|n \Rightarrow (2|n) \wedge (3|n)) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \neg(6|n \Rightarrow (2|n) \wedge (3|n))$$
$$\overset{(c)}{\Leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : 6|n \Rightarrow \neg((2|n) \wedge (3|n))$$

Par propriétés de la négation:

$$\neg((2|n) \wedge (3|n)) \Leftrightarrow (2\nmid n) \vee (3 \nmid n).$$

Alors, on obtient comme négation:

$$\exists n \in \mathbb{N} : 6|n \Rightarrow (2 \nmid n) \vee (3 \nmid n)$$

En français:

"Il existe (au moins) un entier naturel tel que, si $6|n$, alors ($2\nmid n$ ou $3 \nmid n$)"

Exo 2

a) Prenons $E = \mathbb{N}$ et $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{1,2,3\}$

On a bien que $A \subset B \subset C$. Maintenant:

$$C \setminus B = \{3\} \Rightarrow (C \setminus B) \setminus A = \{3\}.$$
$$B \setminus A = \{2\} \Rightarrow C \setminus (B \setminus A) = \{1,3\}.$$

b) Rappelons que $f^{-1}(A') = \{x \in E \mid \exists y \in A' : y = f(x)\}$
$f^{-1}(B') = \{x \in E \mid \exists y \in B' : y = f(x)\}$

Supposons $A' \subset B'$. Démontrons $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$:

Soit $x \in f^{-1}(A')$, alors $\exists y \in A'$ t.q. $y = f(x)$, mais $A' \subset B'$, d'où $\exists y \in B'$ t.q. $y = f(x)$. Par déf., $x \in f^{-1}(B')$. D'où l'inclusion.

Exo 3

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = |x+1| - |x-1|$$

D'abord, on remarque que

*) $|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{si } x+1 \geq 0 \quad (\Longleftrightarrow x \geq -1) \\ -(x+1), & \text{si } x+1 < 0 \quad (\Longleftrightarrow x < -1) \end{cases}$

	-1	
$-(x+1)$		$(x+1)$

*) $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si } x-1 \geq 0 \quad (\Longleftrightarrow x \geq 1) \\ -(x-1), & \text{si } x-1 \geq 0 \quad (\Longleftrightarrow x < 1) \end{cases}$

	1	
$-(x-1)$		$(x-1)$

On donne une expression de $f(x)$ par cas :

	-1		1	
$\lvert x+1\rvert$	$-(x+1)$	$(x+1)$		$(x+1)$
$\lvert x-1\rvert$	$-(x-1)$	$-(x-1)$		$(x+1)$

① Si $x < -1$: $f(x) = -(x+1) + (x-1) = -2$.

② Si $-1 \leq x \leq 1$: $f(x) = (x+1) + (x-1) = 2x$

③ Si $x \geq 1$: $f(x) = (x+1) - (x-1) = 2$.

D'où :

$$f(x) = \begin{cases} -2 & , \text{si } x \leq -1 \\ 2x & , \text{si } x \in [-1;1] \\ 2 & , \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Rappelons que f est impaire si $\forall x \in \mathcal{D}_f$ ($=\mathbb{R}$) : $f(-x) = -f(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Par cas ; on étudie la valeur $f(-x)$:

① Si $x \leq -1$: alors $-x \geq 1$, donc $f(-x) = 2 = -(-2) = -f(x)$.

② Si $-1 \leq x \leq 1$: alors $-1 \leq -x \leq 1$ et $f(-x) = 2(-x) = -(2x)$
$= -f(x)$.

① Si $x \geq 1$: alors $-x \leq -1$ et $f(-x) = -2 = -f(x)$.

D'où : $f(x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et f est impaire.