Équations Différentielles I

Juan VIU SOS
Bureau 3, rdc. Bâtiment IPRA
juan.viusos@univ-pau.fr

26 janvier 2016

Équation différentielle ordinaire (EDO)

EDO

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(E)}$$

Équation différentielle ordinaire (EDO)

EDO

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(E)}$$

où :

- $y = y(x)$ est une fonction réelle de variable réelle et x est dite la *variable indépendante*.

Équation différentielle ordinaire (EDO)

EDO

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(E)}$$

où :

- $y = y(x)$ est une fonction réelle de variable réelle et x est dite la *variable indépendante*.
- $y^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}\, x^i}$ dénote la i–ème dérivée de $y(x)$ par rapport à la variable x.

Équation différentielle ordinaire (EDO)

EDO

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(E)}$$

où :

- $y = y(x)$ est une fonction réelle de variable réelle et x est dite la *variable indépendante*.
- $y^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d} x^i}$ dénote la i–ème dérivée de $y(x)$ par rapport à la variable x.
- L'*ordre* de cette EDO est l'ordre n de la plus haute dérivée y apparaissant.

Équation différentielle ordinaire (EDO)

EDO

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(E)}$$

où :

- $y = y(x)$ est une fonction réelle de variable réelle et x est dite la *variable indépendante*.
- $y^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d} x^i}$ dénote la i–ème dérivée de $y(x)$ par rapport à la variable x.
- L'*ordre* de cette EDO est l'ordre n de la plus haute dérivée y apparaissant.

Résoudre une EDO (E) revient à trouver les fonctions solutions $y : I \to \mathbb{R}$ dans un intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}$ qui vérifient (E).

Exemples

$$y' = 0$$

Exemples

$$y' = 0$$

$$y' = x^2 + 3x + 1$$

Exemples

$$y' = 0$$

$$y' = x^2 + 3x + 1$$

$$\cos(x)y^{(4)} - e^x y'' = \sin(x)$$

Exemples

$$y' = 0$$

$$y' = x^2 + 3x + 1$$

$$\cos(x) y^{(4)} - e^x y'' = \sin(x)$$

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2^{\text{ème}} \textit{ Loi de Newton})$$

Exemples

$$y' = 0$$

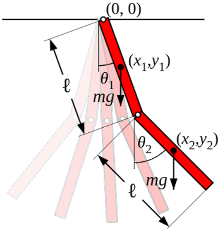
$$y' = x^2 + 3x + 1$$

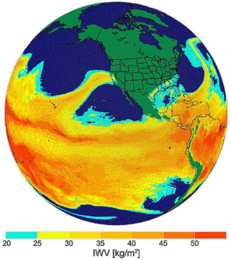
$$\cos(x)y^{(4)} - e^x y'' = \sin(x)$$

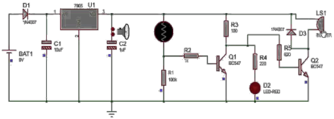
$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad (\textit{2}^{\text{ème}} \textit{ Loi de Newton})$$

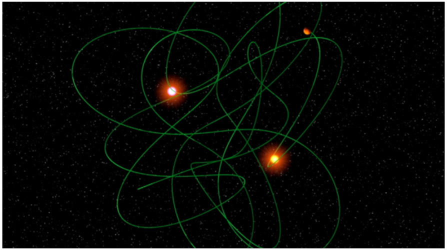
$$y'' + \omega_0^2 \cdot y = 0 \quad (\textit{oscillateur harmonique})$$

Quelques applications : Physique et Génie









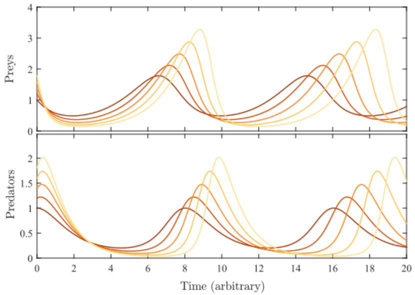
Quelques applications : Biologie

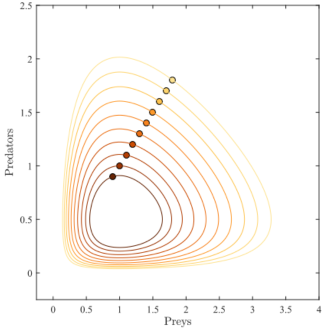
Modèle proie–prédateur :
Équations de Lotka-Volterra (1925)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & x\,(\alpha - \beta y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = & -y\,(\gamma - \delta x) \end{cases}$$

- $x(t)$ et $y(t)$: effectifs des proies et prédateurs résp., à l'instant t.
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des constants du aux taux de mortalité, reproduction et rencontre entre espèces.

Quelques applications : Biologie





Quelques applications : Épidémiologie

Modèle d'épidémie

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\lambda SI}{N} \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\lambda SI}{N} - \mu I \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \mu I \end{cases}$$

- $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$: effectifs des personnes susceptibles, infectées et "guéris" (par immunisation ou décès) résp., à l'instant t.
- $S(t) + I(t) + R(t) = N$ le nombre totale de la population.
- λ, μ des constants d'infection et guérison.

Trouver une SOLUTION EXPLICITE peut être très compliqué (même impossible !)

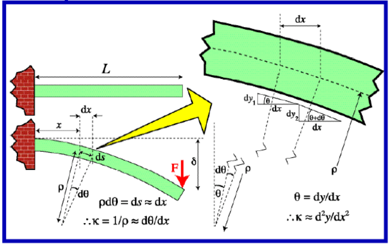
Intégration numérique

Trouver une SOLUTION EXPLICITE peut être très compliqué (même impossible !)

$\rightsquigarrow$

On approche le résultat NUMÉRIQUEMENT en utilisant un ordinateur !

Intégration numérique



Intégration numérique

Plan du TD

- TD 0 : Introduction

Plan du TD

- TD 0 : Introduction
- TD 1 : Équations différentielles de premier ordre

Plan du TD

- TD 0 : Introduction
- TD 1 : Équations différentielles de premier ordre
- TD 2 : Équations différentielles de second ordre

Plan du TD

- TD 0 : Introduction
- TD 1 : Équations différentielles de premier ordre
- TD 2 : Équations différentielles de second ordre
- TD 3 : Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Plan du TD

- TD 0 : Introduction
- TD 1 : Équations différentielles de premier ordre
- TD 2 : Équations différentielles de second ordre
- TD 3 : Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

ACHTUNG !

La participation aux TD est prise en compte.