Équations différentielles I

TD0 – Introduction aux EDOs

Une *équation différentielle ordinaire* (EDO) est une équation de la forme

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{E}$$

où :
- $y = y(x)$ est une fonction réelle de variable réelle et x est dite la *variable indépendante*.
- $y^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}\, x^i}$ dénote la i–ème dérivée de $y(x)$ par rapport à la variable x.
- L'*ordre* de cette équation différentielle est l'ordre n de la plus haute dérivée y apparaissant

Résoudre une équation différentielle (E) revient à trouver les fonctions solutions $y : I \to \mathbb{R}$ dans un intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}$ qui vérifient (E).

Exercice 1. Étudier si les fonctions suivantes sont les solutions des équations différentielles correspondantes :

a) $y(x) = e^{2x}$ de $y' - 2y = 0$.
b) $y(x) = \frac{1}{x}$ de $y'' = x^2 + y^2$.
c) $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ de $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0$, avec $C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
d) $x(t) = C\cos(\omega t)$ de $x'' + \omega^2 x = 0$, avec $C, \omega \in \mathbb{R}$.
e) $x(t) = 2\cosh 2t - 3\sinh 2t$ de $x'' - 4x = 0$.
f) $w(x) = x$ de $x^2 w''' + xw' - w = 0$.
g) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, une fonction $x(t)$ qui vérifie la condition $(t-a)^2 + (x-b)^2 = c^2$, de l'équation différentielle $(x-b)x'' + (x')^2 + 1 = 0$.
h) Soient $k \in \mathbb{R}$, une fonction $z(y)$ qui vérifie la condition $z^2 = ky^2 + k^2$, de l'équation différentielle $(yz)z'' + y(z')^2 - z(z') = 0$.

Exercice 2. Pour chacune des fonctions globalement définies, trouver une équation différentielle dont la solution est :

a) $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$ avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
b) $y(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
c) $u(x) = A\cosh x + B\sinh x + x$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
d) $u(s) = cs + c - c^3$ avec $c \in \mathbb{R}$.
e) $w(\theta) = A\sin\theta + \cos\theta$ avec $A \in \mathbb{R}$.
f) $z(t) = c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3\cosh 2t + c_4 \sinh 2t$ avec $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. *(Indication : calculer des dérivées jusqu'au quatrième ordre)*

Exercice 3 (Modèle de mémorisation d'un poème). Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $P(t)$ représente la partie d'un poème apprise d'après t minutes par un étudiant, où $P = 0$ correspond à ne rien savoir sur le poème et $P = 1$ à avoir tout appris. On considère deux étudiants : Laurène et Jordy. Le taux de mémorisation de Laurène est proportionnel à la quantité de ce qu'elle lui reste à apprendre, avec une constante de proportionnalité égale à 2. Le taux de Jordy est proportionnel au carré de ce qu'il lui reste à apprendre, avec une constante de proportionnalité égale à 3. Soient $P_L(t)$ et $P_J(t)$ les parties du poème mémorisées par Laurène et Jordy dans le moment t, respectivement :

a) Donner les équations différentielles qui modélisent le processus de mémorisation de Laurène et Jordy.
b) Quel étudiant possède un taux plus rapide d'apprentissage dans l'instant $t = 0$ s'ils commencent la mémorisation ensemble et s'ils ne connaissent pas le poème ?
c) Quel étudiant possède un taux plus rapide d'apprentissage dans l'instant $t = 0$ s'ils commencent la mémorisation ensemble et s'ils ont déjà appris la moitié du poème ?
d) Quel étudiant possède un taux plus rapide d'apprentissage dans l'instant $t = 0$ s'ils commencent la mémorisation ensemble et s'ils ont déjà appris un tiers du poème ?