Équations différentielles I

Contrôle Continu – 23 Mars 2016

Durée : 1h30

Documents interdits – calculatrices UPPA autorisées

Chaque réponse devra être justifiée et rédigée de manière rigoureuse. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (7,5pts). En utilisant soit la méthode des coefficients indéterminés soit la méthode de variation de constantes dans chaque EDO, résoudre les problèmes de valeur initial suivantes :

a) $\begin{cases} (t^2+1)x' - 3tx = 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} t^2x' = x + 2t\ln(t^2)e^{-1/t} \\ x(1) = e^{-1} \end{cases}$

Quel est l'intervalle de définition maximal de chaque solution ?

Exercice 2 (7,5pts). Trouver la solution des problèmes de valeur initiale suivants, en explicitant l'intervalle ouvert maximal de définition de la solution :

a) $\begin{cases} x' = \frac{x^3t}{\sqrt{1+2t+t^2}} \\ x(0) = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2e^tx^2x' = t+2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

(*Indication : Il existent deux réelles* $-1 < \alpha < \beta < 2$ tels que la fonction $f(t) = 1-2t+2\ln(1+t) > 0$, $\forall t \in]\alpha;\beta[$, et $f(t) \leq 0$ sinon).

Exercice 3 (6pts). Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^1(U)$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + yf(x) = \sin(x) \qquad (E_f)$$

a) Déterminer $f(x)$ et U de telle manière que (E_f) admet $y(x) = \cos(x)$ comme solution particulière $\forall x \in U$.

b) Soit (E_{f_0}) l'équation différentielle obtenue en remplaçant $f(x)$ dans (E_f) par la fonction $f_0(x)$ obtenue dans (a).

   i) Quelle est la solution générale de (E_{f_0}) ?

   ii) Trouver la solution de (E_{f_0}) qui admet un extremum dans $x = \pi/4$. Quel est son intervalle maximale de définition ?

Équations différentielles I

Solutions détaillées

Solution 1. D'abord, on remarque que les deux EDOs sont des équations linéaires non-homogènes.

a) L'EDO

$$(t^2+1)x' - 3tx = 1 \qquad (E_1)$$

est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. On cherche une solution sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant $t = 0$, car la solution doit vérifier $x(0) = 1$. On peut reécrire (E_1) en forme normale :

$$x' = \frac{3t}{t^2+1}x + \frac{1}{t^2+1}$$

⋆) Équation homogène associé :

$$x' = \frac{3t}{t^2+1}x$$

D'après le cours, on sait que la forme générale des solutions de cet équation homogène est :

$$x_H(t) = \lambda e^{P(t)}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

où $P(t)$ est une primitive de la fonction coefficient en forme normale. Alors :

$$P(t) = \int^t \frac{3s}{s^2+1}\,\mathrm{d}\,s = \frac{3}{2}\int^t \frac{2s}{s^2+1}\,\mathrm{d}\,s = \frac{3}{2}\int^{t^2+1}\frac{u'}{u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{3}{2}[\ln|u|]^{t^2+1} = \ln(t^2+1)^{3/2},$$

à partir du changement de variable $u = s^2+1$ ($\longrightarrow u' = 2s$). D'où, toute solution de l'éq. homogène est de la forme

$$x_H(t) = \lambda e^{P(t)} = \lambda e^{\ln(t^2+1)^{3/2}} = \lambda(t^2+1)^{3/2}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

définie $\forall t \in \mathbb{R}$.

⋆) Solution particulière : On remarque que (E_1) est décrite par polynômes

$$(t^2+1)x' - 3tx = 1 \qquad (E_1')$$

On va utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour trouver une solution polynomiale. On peut remarquer d'abord que si $x_P(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$, avec $a_n \neq 0$ est une solution particulière de (E_1'), le coefficient dominant dans la partie gauche de (E_1') est $na_n - 3a_n = (n-3)a_n$ (associé à t^{n+1}). Ce coefficient doit être nul, car la partie droite de (E_1') est un polynôme de degré 0. D'où, on va tenter trouver la solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. On suppose $x_P \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{1, t, t^2, t^3\}$, i.e. $x_P = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \mu t^3$ pour des certains $\alpha, \beta, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
(t^2+1)x_P' - 3tx_P = 1 &\iff (t^2+1)(\beta + 2\gamma t + 3\mu t^2) - 3(\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \mu t^4) = 1 \\
&\iff (3\mu - 3\mu)t^4 + (2\gamma - 3\gamma)t^3 + (\beta + 3\mu - 3\beta)t^2 + (2\gamma - 3\alpha)t + \beta = 1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{lrcl}
t^4) & 0 & = & 0 \\
t^3) & -\gamma & = & 0 \\
t^2) & 3\mu - 2\beta & = & 0 \\
t^1) & 2\gamma - 3\alpha & = & 0 \\
t^0) & \beta & = & 1
\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l}
\alpha = 0 \\
\beta = 1 \\
\gamma = 0 \\
\mu = 2/3
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{x_P(t) = t + \frac{2}{3}t^3}$$

est solution particulière de (E_1).

⋆) Solution particulière (une autre forme, plus compliqué) : On peut retrouver la même solution particulière en utilisant la MÉTHODE DE LA VARIATION DE CONSTANTES. On impose $x_P(t) = \lambda(t)(t^2+1)^{3/2}$. Si on substitue dans (E_1) :

$$\begin{aligned}
(t^2+1)x_P' - 3tx_P = 1 &\iff (t^2+1)\left(\lambda'(t)(t^2+1)^{3/2} + \lambda(t)\frac{3}{2}(t^2+1)^{1/2}\cdot(2t)\right) - 3t\lambda(t)(t^2+1)^{3/2} = 1\\
&\iff \lambda'(t)(t^2+1)^{5/2} = 1\\
&\iff \lambda'(t) = \frac{1}{(t^2+1)^{5/2}}
\end{aligned}$$

On calcule une primitive :

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \int^t \frac{1}{(s^2+1)^{5/2}}\,\mathrm{d}\,s = \int^t \frac{1+s^2-s^2}{(s^2+1)^{5/2}}\,\mathrm{d}\,s = \int^t \frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}\,s - \int^t \frac{s^2}{(s^2+1)^{5/2}}\,\mathrm{d}\,s\\
&= I_1 - I_2
\end{aligned}$$

On étude chaque intégrale :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int^t \frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}\,s = \int^t \frac{1+s^2-s^2}{(s^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}\,s = \int^t \frac{1}{(s^2+1)^{1/2}}\,\mathrm{d}\,s + \int^t \frac{s^2}{(s^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}\,s\\
&= \begin{bmatrix} \text{INT. PAR PARTIES} & \text{SUR} & \text{2NDE INTÉGRALE}\\ u = s & \rightsquigarrow & u' = 1\\ v' = \frac{s}{(s^2+1)^{3/2}} & \rightsquigarrow & v = -\frac{1}{(s^2+1)^{1/2}} \end{bmatrix}\\
&= \int^t \frac{1}{(s^2+1)^{1/2}}\,\mathrm{d}\,s + \frac{t}{(t^2+1)^{1/2}} - \int^t \frac{1}{(s^2+1)^{1/2}}\,\mathrm{d}\,s = \frac{t}{(t^2+1)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

L'autre intégrale, en utilisant les calculs précédentes :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int^t \frac{s^2}{(s^2+1)^{5/2}}\,\mathrm{d}\,s = \begin{bmatrix} u = s & \rightsquigarrow & u' = 1\\ v' = \frac{s}{(s^2+1)^{5/2}} & \rightsquigarrow & v = -\frac{1}{3(s^2+1)^{3/2}} \end{bmatrix}\\
&= -\frac{t}{3(t^2+1)^{3/2}} + \frac{1}{3}\int^t \frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}\,s\\
&= -\frac{t}{3(t^2+1)^{3/2}} + \frac{1}{3}\frac{t}{(t^2+1)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\lambda(t) = I_1 - I_2 = \frac{t}{(t^2+1)^{1/2}} + \frac{t}{3(t^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{3}\frac{t}{(t^2+1)^{1/2}} = \frac{2t}{3(t^2+1)^{1/2}} + \frac{t}{3(t^2+1)^{3/2}}$$

Alors, la solution particulière :

$$\boxed{x_P(t) = \lambda(t)(t^2+1)^{3/2} = \frac{2}{3}t(t^2+1) + \frac{1}{3}t = t + \frac{2}{3}t^3}$$

La même solution qu'avec la méthode précédente.

⋆) Conclusion : On exprime toute solution de (E_1) comme la somme d'une solution de la partie homogène et une solution particulière,

$$\boxed{x(t) = x_H(t) + x_P(t) = \lambda(t^2+1)^{3/2} + t + \frac{2}{3}t^3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

⋆) Problème de valeur initiale : Si on impose la condition initiale,

$$1 = x(0) = \lambda + 0 \Longleftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

Donc, on a la solution du PVI :

$$\boxed{x(t) = (t^2+1)^{3/2} + t + \frac{2}{3}t^3}$$

définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, domaine de définition maximale.

b) L'EDO

$$t^2x' = x + 2t\ln(t^2)e^{-1/t} \qquad (E_2)$$

est définie pour $t \in \mathbb{R}^*$. On cherche donc une solution sur un intervalle I contenu dans $]0; +\infty[$, car elle doit vérifier $x(1) = e^{-1}$. Forme normale de (E_2) :

$$x' = \frac{x}{t^2} + 2\frac{\ln(t^2)e^{-1/t}}{t}$$

⋆) Équation homogène associé :

$$x' = \frac{x}{t^2}$$

En calculant une primitive $P(t) = \int^t 1/s^2 \,\mathrm{d}\, s = t^{1-2}/(1-2) = -t^{-1}$, la forme générale des solutions de cet équation homogène est :

$$x_H(t) = \lambda e^{P(t)} = \lambda e^{-\frac{1}{t}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

définie sur $t \in \mathbb{R}^*$.

⋆) Solution particulière : Utilisons la méthode de la variation de constantes, on impose une solution particulière de la forme $x_P(t) = \lambda(t)e^{-\frac{1}{t}}$. Si on substitue dans (E_2) :

$$\begin{aligned} t^2x_P'(t) = x_P(t) + 2t\ln(t^2)e^{-1/t} &\Longleftrightarrow t^2\left(\lambda'(t)e^{-\frac{1}{t}} + \frac{\lambda(t)}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}\right) = \lambda(t)e^{-\frac{1}{t}} + 2t\ln(t^2)e^{-1/t} \\ &\Longleftrightarrow t^2\lambda'(t)e^{-\frac{1}{t}} = 2t\ln(t^2)e^{-1/t} \\ &\Longleftrightarrow \lambda'(t) = \frac{2\ln(t^2)}{t} \end{aligned}$$

On calcule une primitive :

$$\lambda(t) = \int^t \frac{2\ln(s^2)}{s}\,\mathrm{d}\, s$$

On remarque que si $u = \ln(s^2)$, alors $u' = \frac{1}{s^2}\cdot(2s) = \frac{2}{s}$. Si on fait un changement de variables :

$$\lambda(t) = \int^{\ln(t^2)} u \,\mathrm{d}\, u = \left[\frac{u^2}{2}\right]^{\ln(t^2)} = \frac{(\ln(t^2))^2}{2}$$

(On peut aussi trouver $\lambda(t)$ si on fait intégration par parties, où $v' = \frac{2}{s} \to v = \ln(s^2)$).
D'où, la solution particulière de (E_2) :

$$x_P(t) = \frac{1}{2}(\ln(t^2))^2e^{-\frac{1}{t}}$$

⋆) Conclusion : On exprime toute solution de (E_2) comme la somme d'une solution de la partie homogène et une solution particulière,

$$\boxed{x(t) = x_H(t) + x_P(t) = \lambda e^{-\frac{1}{t}} + \frac{1}{2}\ln^2(t^2)e^{-\frac{1}{t}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

⋆) Problème de valeur initiale : Si on impose la condition initiale,

$$e^{-1} = x\,(1) = \lambda e^{-1} + 0 \Longleftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

Donc, on a la solution du PVI :

$$\boxed{x(t) = \left(1 + \frac{1}{2}\ln^2(t^2)\right) e^{-\frac{1}{t}}}$$

définie pour tout $t \in]0, +\infty[$, intervalle de définition maximale.

Solution 2. a) L'équation en forme normale :

$$x' = \frac{x^3 t}{\sqrt{1 + 2t + t^2}} = \left(x^3\right) \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{(t+1)^2}}\right) = x^3 \cdot \frac{t}{|t+1|}, \qquad (E_3)$$

est définie pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. D'après la condition initiale, on cherche une solution passant par $t = 0$, donc sur un certain intervalle $0 \in I \subset]-1; +\infty[$. Sur un tel I, l'EDO (E_3) prend la forme :

$$x' = x^3 \cdot \frac{t}{t-1}.$$

En utilisant les variables séparables et en supposant que $x(t) \neq 0, \forall t \in I$:

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^3} = \int_0^t \frac{s}{s+1}\,\mathrm{d}\,s, \quad \forall t \in I.$$

$$\left(\text{ou } \int^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^3} = \int^t \frac{s}{s+1}\,\mathrm{d}\,s + C \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ à déterminer par les cond. init.}\right).$$

On calcule :

⋆) $\displaystyle\int_{-1}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{x(t)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x(t)^2}$

⋆) $\displaystyle\int_0^t \frac{s}{s+1}\,\mathrm{d}\,s = \int_0^t \frac{s+1-1}{s+1}\,\mathrm{d}\,s = \int_0^t 1\,\mathrm{d}\,s - \int_0^t \frac{1}{s+1}\,\mathrm{d}\,s = t - \ln(t+1)$

D'où, la solution en forme implicite :

$$\boxed{\frac{1}{x(t)^2} = 1 - 2t + 2\ln(t+1), \quad \forall t \in I}.$$

On cherche d'exprimer la solution $x(t)$ de forme explicite :

$$x(t)^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t + 2\ln(t+1)}} \Longrightarrow x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - 2t + 2\ln(t+1)}},$$

pour tout $t \in]\alpha; \beta[\subset]-1; 2[$, données dans l'indication de l'exercice. On trouve deux branches de la courbe solution. Car on cherche une solution en vérifiant $x(0) = -1$, on prend la branche négative de la racine carré. D'où, la solution du problème de valeur initiale est

$$\boxed{x(t) = \frac{-1}{\sqrt{1 - 2t + 2\ln(t+1)}}, \quad \forall t \in]\alpha; \beta[}$$

Quel est l'intervalle maximal de définition en contenant $t = 0$? $I =]\alpha; \beta[$, d'après l'indication.

b) D'abord, on remarque que l'EDO est définie $\forall t \in \mathbb{R}$. On cherche la solution sur un certain intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant la condition initiale $t = 0$. On exprime en forme normale, en supposant $x(t) \neq 0$:

$$x' = \left(\frac{1}{2x^2}\right) \cdot (t+2)e^{-t}. \tag{E_4}$$

On utilise les variables séparables pour obtenir le relation :

$$2\int_{x(0)}^{x(t)} x^2 \, \mathrm{d}\, x = \int_0^t (s+2)e^{-s} \, \mathrm{d}\, s, \quad \forall t \in I.$$

$$\left(\text{ou } \int^{x(t)} x^2 \, \mathrm{d}\, x = \int^t (s+2)e^{-s} \, \mathrm{d}\, s + C \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ à déterminer par les cond. init.}\right).$$

Où :

$$\star) \qquad 2\int_1^{x(t)} x^2 \, \mathrm{d}\, x = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{x(t)} = \frac{2}{3}\left(x(t)^3 - 1\right)$$

$$\star) \int_0^t (s+2)e^{-s} \, \mathrm{d}\, s = \left[\begin{array}{l} \text{INT. PAR PARTIES} \\ u = s+1 \rightsquigarrow u' = 1 \\ v' = e^{-s} \rightsquigarrow v = -e^{-s} \end{array}\right] = \left[-(s+2)e^{-s}\right]_0^t + \int_1^t e^{-s} \, \mathrm{d}\, s =$$

$$= -(t+2)e^{-t} + 2 + \left[-e^{-s}\right]_0^t = -(t+3)e^{-t} + 3$$

Solution en forme implicite, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{x(t)^3 = -\frac{3(t+3)}{2}e^{-t} + \frac{11}{2}}$$

La fonction $h(t) = t^3$ est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, dont l'inverse est $h^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$. On obtient la solution explicite :

$$\boxed{x(t) = \sqrt[3]{-\frac{3(t+3)}{2}e^{-t} + \frac{11}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{3(t+3)}{2}e^{-t} + \frac{11}{2}}}$$

définie $\forall t \in \mathbb{R}$, domaine de définition maximal.

Solution 3.

a) Si $y(x) = \cos(x)$ sol. particulière de (E_f), alors pour tout $x \in U$:

$$y'(x) + y(x)f(x) = \sin(x) \iff -\sin(x) + \cos(x)f(x) = \sin(x)$$
$$\iff f(x) = 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 2\tan(x),$$

définie sur $U = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

b) i) On remarque que (E_{f_0}) :

$$y' + 2\tan(x)y = \sin(x),$$

est une équation différentielle linéaire non-homogène, dont la partie homogène est :

$$y' = -2\tan(x)y \qquad (H_{f_0})$$

Il nous faut qu'une primitive $P(x)$ de $p(x) = -2\tan(x)$ sur $x \in U$:

$$P(x) = \int^x -2\tan(t)\,\mathrm{d}\,t = -2\int^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}\,t = \begin{bmatrix} \text{CHGT DE VAR.} \\ u = \cos(t) \\ u' = -\sin(t) \end{bmatrix} = 2\int^{\cos(x)} \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}\,u$$
$$= [2\ln|u|]^{\cos(x)} = \ln|\cos(x)|^2 = \ln(\cos^2(x))$$

D'après le cours, toute solution de la partie homogène associé est de la forme :

$$\boxed{y_H(x) = \lambda e^{P(x)} = \lambda\cos^2(x),\ \forall x \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

On sait que tout solution de (E_{f_0}) est de la forme :

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) \quad \text{où} \begin{cases} y_H(x) \text{ solution de l'éq homogène } (H_{f_0}) \\ y_P(x) \text{ solution part. de } (E_{f_0}) \end{cases}$$

On a vu dans (a) que $y(x) = \cos(x)$ est solution particulière de E_{f_0}, alors :

$$\boxed{y(x) = \lambda\cos^2(x) + \cos(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

solution générale de (E_{f_0}), $\forall x \in U$.

ii) D'abord, la solution cherchée est définie sur l'intervalle maximal dans U contenant $x = \pi/4$, c-à-d. $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. La solution $y(x)$ admet un extremum dans $x = \pi/4$ sii $y'(\pi/4) = 0$. Si on impose cette condition :

$$0 = y'(\pi/4) = -2\lambda\sin(\pi/4)\cos(\pi/4) - \sin(\pi/4) = -2\lambda\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'où $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et la solution est de la forme :

$$\boxed{y(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2(x) + \cos(x), \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}$$