Introduction à la Modélisation Statistique

TD2 – Loi binomiale et loi normale

1 Loi Binomiale

Exercice 1. Soit X une v.a.d. suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, i.e. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Prouver que $\mathrm{Var}[X] = npq$.

Exercice 2. On sait par expérience qu'une certaine opération chirurgicale a 90% de chances de réussir. On s'apprête à réaliser l'opération sur 5 patients de façon indépendante. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réussites de l'opération sur les 5 tentatives.

a) Quel modèle proposez-vous pour X ?
b) Quelle est la probabilité que l'opération rate les 5 fois ?
c) Quelle est la probabilité que l'opération rate exactement 3 fois ?
d) Quelle est la probabilité que l'opération réussisse au moins 3 fois ?

Exercice 3. Un questionnaire à choix multiples (QCM) comprend 20 questions indépendantes auxquelles on répond "Vrai" ou "Faux". Un élève répond au hasard à toutes les questions.

a) Définir une variable aléatoire sur la note finale de l'élève et déterminer sa loi de probabilité.
b) Quel est la probabilité que l'élève réussisse l'examen ?
c) A-t-il autant de chances de répondre exactement à 3 questions que de réponde exactement à 17 ?
d) Déterminer la note attendue par l'élève.

Exercice 4. On tire successivement avec remise 8 cartes d'un jeu de 32. En définissant les variable aléatoires appropriées dans chaque cas, répondre :

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement cinq rois ? et au moins un roi ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un trèfle ? et aucun trèfle ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 6 figures ? et que les huit cartes soient des figures ?

Exercice 5. Quand un chasseur tire sur un lapin sans défense, il a une chance sur 10 de le toucher.

a) Deux chasseurs tirent indépendamment sur le même lapin. Calculer la probabilité que :
   i) aucun ne le touche ;
   ii) un seul chasseur le touche ;
   iii) les deux chasseurs le touchent.
b) Quatre chasseurs tirent indépendamment sur le même lapin.
   i) Quelle est la loi de probabilité du nombre de coups de fusils reçus par la pauvre bête ? Donner l'espérance et la variance de cette loi.
   ii) Quelle est la probabilité que le lapin reçoive au plus 2 coups de fusil ?
   iii) Quelle est la probabilité que le lapin reçoive au moins 2 coups de fusil ?
c) Dix chasseurs tirent indépendamment sur le même lapin.
   i) Quelle est la probabilité que le lapin conserve l'étanchéité de sa fourrure ?
   ii) Quelle est la probabilité que le lapin soit immangeable (s'il a reçu au moins 5 coups de fusil) ?

Exercice 6. On lance 8 fois un dé parfait. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois un nombre pair ? et d'obtenir au plus cinq fois un nombre strictement plus petit que 5 ?

Exercice 7. Lors d'une séance d'identification, on propose à 6 témoins de désigner un coupable parmi 4 suspects, dont vous faites partie.

a) Si chacun des 6 témoins choisissait au hasard, quelles seraient vos chances :
   i) de n'être jamais désigné ?
   ii) d'être désigné exactement une fois ?
   iii) d'être désigné deux fois ou plus ?

b) Dans votre for intérieur vous vous savez innocent, mais il se trouve que 2 des 6 témoins vous ont désigné comme le coupable. Par référence au résultat de la question (a)-(iii), pensez-vous que le juge pourra attribuer cela au hasard ?

Exercice 8. Un QCM comprend 10 questions auxquelles on a trois possibles réponses, dont une seule est exacte. Un étudiant répond au hasard à toutes les questions. Pour chaque question bien répondue, élève obtient 2 points, mais en cas de réponse erronée, une pénalisation de 0.5 points est imposée.

a) Définir respectivement les variables aléatoires sur le nombre de réponses correctes et incorrectes de l'élève. Déterminer ses lois de probabilités. Exprimer une des v.a. en fonction de l'autre.

b) Quelle est la probabilité que l'élève répond bien 6 questions ?

c) Définir une v.a. sur la note final, exprimée en fonction des réponses correctes. Quelle est la probabilité que l'élève réussi l'examen ?

d) Déterminer la note théorique attendue par l'élève. Est-ce que le professeur a-t-il bien choisit un bon modèle d'examen ?

Exercice 9 (Bilan extra). A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité $p \in]0,1[$ de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 10 (Bilan extra). Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?

2 Loi normale

Exercice 11. On considère une variable aléatoire Z suivant une loi centrée réduite.

a) i) Déterminer la probabilité $P(Z < 0,73)$.
   ii) À partir de (a)-(i), et sans utiliser la table de valeurs de $\mathcal{N}(0,1)$, déterminer les probabilités $P(Z > 0,73)$, $P(Z \leq 0,73)$ et $P(Z \geq 0,73)$.

b) i) Déterminer les probabilités $P(Z \leq -0,55)$ et $P(Z \leq 0,77)$.
   ii) À partir des résultats de (b)-(i), calculer la probabilité de que Z soit comprise entre $-0,55$ et $0,77$.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$ strictement positif. Exprimer $P(Z > -a)$, puis $P(Z \leq -a)$ en fonction de $\Phi(a) = P(Z \leq a)$.

Exercice 12. Calculer approximativement la valeur critique $z_{\alpha/2}$ pour $\alpha = 0.1$ et $\alpha = 0.25$.

Exercice 13. Une machine produit des clous dont la longueur moyenne est de 12 mm, avec un écart-type de 0,2 mm. La longueur L d'un clou pris au hasard est une variable aléatoire qui suit une loi normale. Un clou est jugé défectueux si sa longueur est supérieure à 12,5 mm ou inférieure à 11,5mm.

a) Quelle est la proportion de clous défectueux ?

b) Pour un clou défectueux pris au hasard, quelle est la probabilité que sa longueur soit inférieure à 11,5 mm ?

Exercice 14. Soit la variable aléatoire X qui exprime la taille des hommes en France, en suivant une loi normale de moyenne 172cm et une variance de 196 cm^2.

a) Quelle proportion de français a une taille inférieure à 160 cm ?

b) Quelle proportion de français mesure plus de deux mètres ?

c) Quelle proportion des français mesure entre 165 et 185 centimètres ?

d) Si on classait dix mille français choisis au hasard par ordre de taille croissante, quelle serait la taille du 9000-ième ?

Exercice 15. Dans un supermarché, le gérant a établi une statistique de ses ventes quotidiennes de packs d'eau minérale. Il apparaît que le nombre X de packs vendue chaque jour suit une loi normale de moyenne 52 et d'écart-type 12.

a) Le gérant ne peut pas stocker plus de 76 packs dans sa réserve. Avec un tel stocks, quelle est la probabilité qu'un jour donné, il ne puisse pas répondre à la demande ?

b) Il ne souhaite pas remplir complètement sa réserve, car cela rend la manutention difficile. Mais il voudrait limiter à 5% le risque de rupture de stock. Quel doit être au minimum son stocks quotidien ?

Exercice 16. Une machine est conçue pour confectionner des paquets d'un poids de 500g, mais ils n'ont pas exactement tous le même poids. On a constaté que la distribution des poids suit une loi normale de valeur moyenne de 500g avec un écart-type de 25g.

a) Sur 1000 paquets, quel est le nombre moyen de paquets pesant entre 480g et 520g ?

b) Combien de paquets pèsent entre 480g et 490g ?

c) Sur 1000 paquets, quel est le nombre moyen de paquets pesant plus de 450g ?

d) Trouver le réel a positif tel que les $9/10$ de cette production aient un poids compris entre $500 - a$ et $500 + a$.

Exercice 17. La taille d'un épi de blé dans un champ est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 15cm et variance 36cm^2.

a) Quelle est la probabilité pour qu'un épi ait une taille inférieure à 16 cm ?

b) On admet qu'il y a environ 15 millions d'épis dans le champ, donner une estimation du nombre d'épis de plus de 20 cm.

Exercice 18. La capacité respiratoire de sujets normaux, de sexe masculin, âgés de 20 à 30 ans est supposée obéir à une loi normale de moyenne $3,5$ litres et de variance 1. On tire au hasard dans la population des joueurs de rugby âgés de 20 à 30 ans, 100 sujets dont on mesure la capacité respiratoire. Onze d'entre eux ont une capacité respiratoire qui dépasse $4,64$ l. Si on considère que la capacité respiratoire de ces joueurs obéit à la loi précédente, quelle était la probabilité que 11 de ces joueurs ou davantage aient une capacité respiratoire supérieure à $4,64$ litres ?

3 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Exercice 19. On sait par expérience qu'une certaine opération chirurgicale a 90% de chances de réussir. Cette opération est réalisée dans une clinique 400 fois chaque année. Soit N le nombre de réussites dans une année. On utilisera l'approximation normale pour N.

a) Calculer l'espérance et la variance de N.

b) Calculer la probabilité que la clinique réussisse au moins 345 opérations dans l'année.

c) Calculer la probabilité que la clinique rate plus de 28 opérations dans l'année.

d) L'assurance accepte de couvrir un certain nombre d'opérations ratées : ce nombre n'a que 1% de chances d'être dépassé. Quel est-il ?

Exercice 20. Pour un certain traitement médical, on a observé que les patients peuvent faire une réaction allergique avec une probabilité de 0,02. On prévoit de traiter 1 225 personnes. Quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins 30 qui fassent cette réaction allergique ?

Exercice 21. Un restaurant servant des repas uniquement sur réservation, dispose de 50 places. La probabilité qu'une personne ayant réservé ne vienne pas est $1/5$. On note N le nombre de repas servis un jour donné. On utilisera l'approximation normale pour N.

a) Si le patron accepte 50 réservations, quelle est la probabilité qu'il serve plus de 45 repas ?

b) S'il accepte 55 réservations, quelle est la probabilité qu'il se retrouve dans une situation embarrassante ?

Exercice 22. Une compagnie aérienne estime qu'un client sur dix ayant réservé sa place ne se présente pas à l'embarquement. Sur le vol MA 2013, l'avion à une capacité de 300 places. Pour optimiser son remplissage, la compagnie a accepté plus de 300 réservations. Ce faisant, elle court le risque que se présente à l'embarquement plus de 300 personnes ayant réservé, auquel cas elle devra indemniser ceux qui ne pourront embarquer. On note n le nombre de réservations, acceptées par la compagnie, et X la variable aléatoire indiquant le nombre de personnes ayant réservé qui se présentent à l'embarquement. On suppose les comportements des clients indépendants les uns des autres.

a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Justifier que cette loi binomiale peut être approchée par une loi normale dont on précisera les paramètres.

c) On suppose dans cette question que $n = 324$. Quelle est la probabilité que la compagnie ne puisse pas embarquer tous les passagers qui se présentent ?

d) La compagnie souhaite limiter à 1% le risque de ne pouvoir embarquer tous les passagers qui se présentent. Déterminer le nombre maximum de places qu'elles peut proposer à la réservation.