Introduction à la Modélisation Statistique

TD1 – Introduction aux variables aléatoires

1 Probabilité et indépendance

Exercice 1. On considère l'expérience aléatoire qui consiste en extraire une boule d'une urne qui contient deux boules vertes numérotées par 1 et 2, deux boules rouges numérotées par 3 et 4, et deux boules noires numérotées par 5 et 6. L'univers peut être représenté par l'ensemble $\Omega = \{V1, V2, R3, R4, N5, N6\}$.

a) Décrire les événements $A = \{$“ extraire une boule verte ou noire ”$\}$ et $B = \{$“extraire une boule numérotée par un numéro pair”$\}$ par des éventualités de l'univers Ω.

b) Exprimer en utilisant des opérations entre A et B les événements suivantes, puis les décrire explicitement par des éventualités.

   i) $C = \{$“ extraire une boule verte ou noire ou numérotée par un numéro pair ”$\}$.

   ii) $D = \{$“ extraire une boule verte ou noire et numérotée par un numéro pair ”$\}$.

   iii) $E = \{$“ ne pas extraire une boule verte ou noire ”$\}$.

   iv) $F = \{$“extraire une boule numérotée par un numéro pair qui ne soit pas de couleur verte ou noire”$\}$.

   v) $G = \{$“extraire, ou bien une boule numérotée par un numéro pair mais qui n'est pas de couleur verte ou noire, ou bien une boule de couleur verte ou noire mais qui n'est pas numérotée par un numéro pair”$\}$.

   vi) Décrire deux d'événements incompatibles dans Ω.

c) Quel est le modèle probabiliste qui représente cet expérience aléatoire ? Calculer les probabilités des événement précédentes.

Exercice 2. On classifie 1200 personnes d'un village par rapport au genre et si elles fument ou non et on obtient le tableau descriptif :

	femme	homme
fume	200	600
ne fume pas	100	300

Une expérience aléatoire consiste à prendre une personne au hasard.

a) Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.

b) Quel est le modèle probabiliste plus adaptée pour décrire l'expérience aléatoire ?

c) Soient les événements $H = \{$“ la personne est un homme ”$\}$ et $F = \{$“ la personne fume ”$\}$.

   i) Calculer $P(H)$, $P(F)$ et $P(H \cap F)$.

   ii) Sont les événements H et F incompatibles ? sont-ils indépendants ?

d) Parmi les personnes qui fument, on remarque qu'un 35% sont atteints de cancer. Cependant, seulement 50 personnes qui ne fument pas sont atteints de cancer. Soit l'événement $C = \{$“ la personne est atteint de cancer ”$\}$.

   i) Calculer $P(C)$.

   ii) Déterminer la probabilité qu'une personne soit fumeur et soit atteint de cancer.

   iii) Sont les événements F et C indépendants ?

Exercice 3. Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques. Pour une commande de 2.000 pièces, A en a produit 60%. L'atelier A produit 4% de puces défectueuses et B en produit 3%. On prend une puce au hasard dans la commande. On appelle $A = \{$“la puce provient de l'atelier A”$\}$, $B = \{$“elle provient de l'atelier B”$\}$ et $D = \{$“elle est défectueuse”$\}$.

a) Faire un tableau d'effectifs suivant l'origine de fabrication des pièces et suivant qu'elle est défectueuse ou non.

b) Calculer les valeurs de $P(D)$ et $P(A \cap D)$. En déduire la probabilité qu'un pièce défectueuse provienne de l'atelier A.

c) Calculer les valeurs de $P(\overline{D})$ et $P(B \cap \overline{D})$. En déduire la probabilité qu'un pièce non défectueuse provienne de l'atelier B.

d) En construire un arbre pondéré qui exprime l'origine d'une pièce en fonction si elle est défectueuse ou non.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{A}$ des événements. Sur ces deux événement, on a déterminé que la probabilité que :

- A soit réalisé est de $1/5$,
- B soit réalisé est de $1/3$,
- A ne soit pas réalisé ou B ne soit pas réalisé est de $1/3$.

En déduire les valeurs de $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$. Sont A et B indépendants ?

Exercice 5 (Efficacité d'un test de dépistage)**.** Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un certain virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (*sensibilité du test*).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (*spécificité du test*).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement "la personne est contaminée par le virus" et T l'événement "le test est positif ". À l'aide d'un arbre pondéré, calculer :

a) la probabilité que le test soit positif.

b) la probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif (*valeur prédictive positive du test*).

c) On estime que ce test est efficace pour une population donnée lorsque la valeur prédictive positive du test est supérieure à 0,95. Ce test est-il efficace sur la population étudiée ?

Exercice 6. À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction de l'aéroport de Notre-Dame-des-Landes, on estime que 65% de la population concernée est contre la construction du aéroport et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes ; et parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes. On interroge une personne au hasard.

a) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au aéroport et soit écologiste.

c) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée et soit écologiste.

d) En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

Exercice 7. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle $A = \{$"l'appareil présente un défaut d'apparence"$\}$ et $F = \{$"l'appareil présente un défaut de fonctionnement"$\}$. On suppose que les événements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069. Si on choisit au hasard un des appareils, quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut de fonctionnement ?

Exercice 8 (Bilan extra). On considère trois urnes $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne $\mathcal{U}_3$ contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de $\mathcal{U}_1$ et une boule de $\mathcal{U}_2$, à les mettre dans $\mathcal{U}_3$, puis à tirer au hasard une boule de $\mathcal{U}_3$. Pour $i = 1, 2, 3$, on désigne par N_i , (respectivement R_i) l'événement "on tire une boule noire de l'urne $\mathcal{U}_i$" (respectivement "on tire une boule rouge de l'urne $\mathcal{U}_i$").

a) Construire l'arbre pondéré qui décrit les tirages consécutifs des trois urnes.

b) i) Calculer la probabilités des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
   ii) En déduire la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.
   iii) Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.

c) Déduire de la question précédente que $P(N_3) = 2/5$.

d) Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

2 Variables aléatoires discrètes

Exercice 9. Soit X une v.a.d. définie sur un univers fini Ω. Prouver que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{E}[aX + b] = a\,\mathrm{E}[X] + b \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}[aX + b] = a^2\,\mathrm{Var}[X].$$

Exercice 10. On considère deux lancés consécutifs d'une pièce non-truqué :

a) Décrire l'univers associé Ω. Quel est le modèle probabiliste plus adaptée pour décrire l'expérience aléatoire ?

b) Soit la variable aléatoire discrète $X =$"nombre de piles obtenues dans deux lancés consécutifs d'une pièce ". Quel est l'univers image $X(\Omega)$?

c) Exprimer la loi de probabilité de X par un tableau.

d) Décrire les évènements {" obtenir au plus une pile "}, {"obtenir au moins deux piles"} et {"obternir entre un et deux faces"} en utilisant la v.a.d. X. Calculer la probabilité associé à chacun des événements précédents.

e) Déterminer $\mathrm{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.

Exercice 11. Imaginons qu'on en train de jouer avec un ami au jeu de *pile-pile* : on lance deux pièce s équilibrés, si on obtient "pile–pile" notre ami doit nous donner 1 euro, si on obtient "face–face" c'est nous qui donnons l'euro à notre ami. Dans un autre case, rien se passe. Quelle est le bénéfice attendu dans ce jeu ? (Indication : *définir une v.a.d. Y de bénéfice dans le jeu en fonction de la v.a.d. X du exercice précédent*).

Exercice 12. Un club de randonnée propose à ses adhérents une sortie payante suivant les tarifs indiqués ci-dessous :

Catégorie	Adultes (A)	Jeunes (J)	Enfants (E)
Sortie	20 €	13 €	7 €
Repas	12 €	7 €	4 €

Le club a inscrit 87 participants pour cette sortie dont 58 adultes et 12 enfants. La moité des adultes, un quart des enfants et 10 jeunes ont apporté leur propre pique-nique.
On choisit au hasard un participant et on note par X la variable aléatoire qui indique le prix payé au club par un participant.

a) Faire un tableau d'effectifs suivant la catégorie du participant et suivant qu'il emporte son pique-nique ou non.

b) Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

c) Déterminer la loi de probabilité de X par un tableau des valeurs possibles et leurs probabilités associées.

d) Quel est la probabilité que le participant paye au club moins de 15€ ?

e) Sur quel tarif moyen par adhérent peut compter le club s'il renouvelle un grand nombre de fois ce type de sortie dans les mêmes conditions ?

Exercice 13. Un joueur lance trois fois consécutives une pièce de monnaie non-truqué. Il gagne autant d'euros comme faces obtenus, sauf lorsqu'il obtient trois piles, où il perd 10€. Soit X la v.a.d. qui décrit le bénéfice du joueur à chaque tirée. Déterminer :

a) L'ensemble des valeurs prises par X et la loi de probabilité de X .

b) $\mathrm{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$. S'agit-il d'un jeu favorable au joueur ?

Exercice 14. On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle è k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 è 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé. Déterminer la loi de X.

Exercice 15. Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$, avec

$$P(X = 0) = 0,1, \quad P(X = 1) = 0,3, \quad P(X = 2) = 0,4, \quad P(X = 3) = 0,2.$$

a) On note Y le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Y. On pourra considérer dans la suite que X et Y sont des variables indépendantes.

b) On note $Y =$"nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.

c) Calculer la marge brute moyenne par jour.