

## INTRODUCTION À LA MODÉLISATION STATISTIQUE

EXAMEN 2<sup>NDE</sup> SESSION – JUIN 2016

DURÉE : 1H30

DOCUMENTS INTERDITS – CALCULATRICES UPPA AUTORISÉES

*Chaque réponse devra être justifiée et rédigée de manière rigoureuse. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront dans l'appréciation des copies.  
Tous les résultats demandés seront arrondis au  $10^{-3}$  près.*

**Exercice 1 (4 pts).** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Supposons que l'univers image  $X(\Omega)$  est fini, c-à-d.  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

- 1) Définir l'espérance  $E[X]$  et la variance  $\text{Var}[X]$  de la v.a.d.  $X$ .
- 2) Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Démontrer que  $E[aX + b] = aE[X] + b$ .

**Exercice 2 (10 pts).** On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Pour chaque dé, on va s'intéresser à l'obtention de 6 lors d'un lancé.

- 1) Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le truqué, on a déterminé que la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancé est égale à  $\frac{1}{3}$ .
  - a) On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus. On fait le même avec le dé truqué, en désignant par  $Y$  le nombre de 6 obtenus avec ce dé.
    - i. Quelle loi de probabilité suit  $X$  ? et  $Y$  ? Justifiez votre réponse.
    - ii. Calculer la probabilité d'obtenir deux 6 avec le dé équilibré. De même pour le dé truqué.
    - iii. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 avec le dé équilibré ? Et d'obtenir au plus un 6 avec le dé truqué ?
    - iv. Quelle est en moyenne le nombre de 6 attendu avec chacun des dés ?
  - b) On choisit au hasard l'un des deux dés, en lançant une pièce de monnaie équilibré. De suite, on lance le dé choisi trois fois. On considère les événements  $E = \{\text{"le dé choisi est le dé bien équilibré"}\}$  et  $D = \{\text{"obtenir exactement deux 6"}\}$ .
    - i. Représenter cette procédure à l'aide d'un arbre pondéré en termes de  $E$  et  $D$ , en calculant les probabilités de chaque branche de l'arbre.
    - ii. Calculer la probabilité de choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6. De même pour la probabilité de choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6.
    - iii. En déduire  $P(D)$ .
    - iv. Ayant choisit au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6 ! Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?
- 2) On prendre un autre pair différent de dés qu'on sait qu'ils sont truqués. On dote  $p_1$  la probabilité d'obtenir 6 lors d'une lancé avec le premier dé et  $p_2$  celle d'obtenir 6 avec le second dé. Sur 250 lancers des deux dés, on obtient 6 comme résultat 121 fois pour le premier dé et 80 fois pour le second.
  - a) A l'aide d'un intervalle de confiance à 95%, procéder à une estimation de la probabilité  $p_1$ . De même pour  $p_2$ .

- b) Peut-on écarter l'hypothèse que les deux dés soient truqués de la même manière? Pourquoi?
- c) Combien de lancés aurait-il fallu faire pour assurer un encadrement de  $p_1$  et  $p_2$  à 0,1 près?

**Exercice 3 (6 pts).** On considère une étude mise à jour<sup>1</sup> sur 88 personnages de la série TV américaine *Game of Thrones* (aussi appelée *Le Trône de Fer*) appartenant aux familles *Stark* et *Lannister*. On classe ces personnages par *famille* (“Stark”/“Lannister”), *genre* (“homme”/“femme”) et *état du personnage* (“mort”/“vivant”). Cela a conduit au tableau de contingence donné ci-dessous :

	Stark		Lannister	
	Mort	Vivant	Mort	Vivant
Homme	20	15	15	17
Femme	7	6	3	5

- 1) Si on choisit au hasard un des personnages, calculer la probabilité :
  - a) qu'il soit un Stark,
  - b) qu'il soit mort,
  - c) qu'il soit mort en sachant que le personnage appartienne aux Stark.
  - d) qu'il soit mort en sachant que le personnage appartienne aux Lannister.
  - e) qu'il appartienne aux Stark en sachant que le personnage est mort.
  - f) qu'il appartienne aux Lannister en sachant que le personnage est mort.
- 2) L'écrivain responsable de la série, Georges R.R. Martin, utilise la méthode suivante chaque fois qu'il veut tuer un des personnages appartenant aux Stark ou aux Lannister dans l'histoire : il lance une ancienne pièce de monnaie qu'il possède depuis longtemps. Si le résultat est *pile*, il tue un Stark, tandis que s'il obtient *face*, le personnage qui souffrira la destination fatale sera un Lannister.
  - a) On assume que la pièce est bien équilibrée. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion des piles parmi 45 lancés.
  - b) Suite à des nombreuses plaintes des fans de la série par rapport à comment les personnages Stark sont maltraités dans la série, George R. R. Martin commence à soupçonner que sa monnaie n'est pas bien équilibrée. Est-ce qu'il a des raisons de s'inquiéter?

---

1. Analyse sur <http://regressing.deadspin.com/valar-morghulis-a-statistical-guide-to-deaths-in-game-1618282560>