Équations différentielles I

Contrôle Continu – 20 Mars 2015

Durée : 1h30

Documents interdits – calculatrices UPPA autorisées

Chaque réponse devra être justifiée et rédigée de manière rigoureuse. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (7pts). Étude des équations différentielles linéaires de premier ordre :

a) Soit $k \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. On considère l'équation différentielle :

$$t^k x' = x \qquad (E_H)$$

Résoudre (E_H) en fonction de k. Quel est le domaine de la solution dans chaque cas ?
(*Indication : on peut écrire* $k = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ *où* $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ *et* $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$)

b) En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, trouver la solution du problème de valeur initiale suivant en explicitant son domaine de définition :

$$\begin{cases} \sqrt{t}x' = x + 3t - \sqrt{t} \\ x(1) = -5 \end{cases} \qquad (E_1)$$

c) En utilisant la méthode de variation de constantes, trouver la solution du problème de valeur initiale suivant, en explicitant son domaine de définition :

$$\begin{cases} t^2 x' = x + 2t\ln(t^2)e^{-1/t} \\ x(1) = 0 \end{cases} \qquad (E_2)$$

Exercice 2 (7pts). Trouver la solution des problèmes de valeur initiale suivants, en explicitant l'intervalle ouvert maximal de définition de la solution :

a) $\begin{cases} x' = \frac{tx^3}{\sqrt{1+t^2}} \\ x(0) = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \frac{-\sqrt{x}e^{\tan(t)}}{\cos^2(t)} \\ x(\pi) = 1 \end{cases}$

Exercice 3 (7pts). Donner une solution en séries entières de l'équation différentielle suivante :

$$x'' + tx' = x$$

avec conditions initiales :

a) $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.

b) $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

Quel est l'intervalle de convergence de la solution en séries entières dans chaque cas ?

Indications :
- $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1, \quad n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 1, \quad n!!! = n(n-3)(n-6)\cdots 1$.
- *On ne vous demande pas de trouver une fonction dont le développement de Taylor est la solution en séries entières de l'équation.*

Équations différentielles I
Solutions détaillées

Solution 1.

a) Soit $k \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ et

$$t^k x' = x \tag{E_H}$$

On remarque que (E_H) est une équation linéaire homogène. Étudions (E_H) par cas :

$\star$) Si $k = 0$:

$$x' = x \tag{E_H}$$

D'après les résultats du cours, on sait que pour toute équation homogène de la forme $x' = p(t)x$, la forme générale des solutions est $x(t) = Ce^{P(t)}, C \in \mathbb{R}$, où $P(t)$ est une fonction primitive de $p(t)$. D'où :

$$\boxed{x(t) = Ce^{\int^t \mathrm{d}\, s} = Ce^t, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Cette solution est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$\star$) Si $k = 1$:

$$tx' = x \tag{E_H}$$

Si $t = 0$, on déduit que $x' = 0$ par (E_H), donc la fonction $x(t) = 0$ est solution de (E_H). Supposons $t \neq 0$, on peut écrire (E_H) en forme normale

$$x' = \frac{1}{t}x$$

En utilisant les mêmes arguments précédents, la forme générale des solutions est

$$\boxed{x(t) = Ce^{\int^t \frac{1}{s}\, \mathrm{d}\, s} = Ce^{\ln|t|} = C|t|, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Cette solution est définie pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

$\star$) Si $k \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \setminus \{0, 1\}$:

$$t^k x' = x \tag{E_H}$$

Si $t = 0$, on déduit que $x' = 0$ par (E_H), donc la fonction $x(t) = 0$ est solution de (E_H). Supposons $t \neq 0$, (E_H) en forme normale

$$x' = \frac{1}{t^k}x$$

Encore une fois, la forme générale des solutions est

$$\boxed{x(t) = Ce^{\int^t \frac{1}{s^k}\, \mathrm{d}\, s} = Ce^{\int^t s^{-k}\, \mathrm{d}\, s} = Ce^{\frac{t^{1-k}}{1-k}}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Où est-ce que ces solutions sont-elles définies ? On regarde sur l'argument de l'exponentielle. Car $k \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \setminus \{0, 1\}$, on peut écrire $k = \frac{n}{m}$ où $n \neq m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ et $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. Alors :

$$\frac{t^{1-k}}{1-k} = \frac{t^{1-\frac{n}{m}}}{1-\frac{n}{m}} = \frac{m}{m-n} t^{\frac{m-n}{m}} = \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{t^{m-n}}$$

Donc, il faut étudier la parité de m et $m - n$:

- Si m pair : Alors n est impair (sinon $\text{pgcd}(m,n) = 2$, mais $\text{pgcd}(m,n) = 1$ par hypothèse !). Donc $m-n$ est impair et $t^{m-n} < 0$ si $t < 0$. Mais $\sqrt[m]{\cdot}$ est définie que dans $\mathbb{R}^+$, donc les solutions non-nulles de (E_H) sont définies pour tout $t \in]0,+\infty[$.

- Si m impair : Dans ce cas, $\sqrt[m]{\cdot}$ est définie dans tout $\mathbb{R}$, donc les solutions non-nulles de (E_H) sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

b) On remarque que (E_1) est définie pour $t \in]0,+\infty[$ à cause des racines.

$\star$) Équation homogène associé :

$$\sqrt{t}x' = x$$

D'après (a), on sait que la forme générale des solutions de cet équation homogène est :

$$x_H(t) = Ce^{\frac{1}{1-1/2}t^{1-1/2}} = Ce^{2t^{1/2}} = Ce^{2\sqrt{t}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

définie sur $t \in]0,+\infty[$.

$\star$) Solution particulière : On utilise la méthode des coefficients indéterminés.

$$\sqrt{t}x' = x + 3t - \sqrt{t} \iff \sqrt{t}x' - x = 3t - \sqrt{t}$$

Soit $V_0 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{3t-\sqrt{t}\right\} = \left\{\lambda(3t-\sqrt{t})\right\}$ l'espace vectoriel généré par la fonction de la partie non-homogène, et $\mathcal{O}_H = \left(\sqrt{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} - 1\right)$ l'opérateur différentiel associé à la partie homogène. On cherche un espace vectoriel de fonctions W tel que $V_0 \subset \mathcal{O}_H(W)$. Car V_0 contiens des t et $\sqrt{t}$, on essaie avec $W = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{t, \sqrt{t}\right\}$:

$$\lambda,\mu \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{O}_H\left(\lambda t + \mu\sqrt{t}\right) = \lambda\left(\sqrt{t} - t\right) + \mu\left(\frac{1}{2}\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right) = -\lambda t + (\lambda-\mu)\sqrt{t} + \frac{\mu}{2}$$

Il est clair que $V_0 \not\subset \mathcal{O}_H(W)$, car l'équation $3t - \sqrt{t} = -\lambda t + (\lambda-\mu)\sqrt{t} + \frac{\mu}{2}$ n'admet pas de solution sur $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Mais, d'après les comptes précédentes, on voit qu'on doit d'introduire des constantes dans W. On prend $W_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{1, t, \sqrt{t}\right\}$:

$$\lambda,\mu,\gamma \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{O}_H\left(\lambda + \mu t + \gamma\sqrt{t}\right) = \left(\frac{\gamma}{2} - \lambda\right)1 - \mu t + (\mu-\gamma)\sqrt{t}$$

Donc, si on veut retrouver la fonction de la partie non-homogène :

$$3t - \sqrt{t} = \left(\frac{\gamma}{2} - \lambda\right)1 - \mu t + (\mu-\gamma)\sqrt{t} \iff \boxed{\lambda = -1, \mu = -3, \gamma = -2}$$

Donc $V_0 \subset \mathcal{O}_H(W_1)$ et $\mathcal{O}_H(x_p) = 3t - \sqrt{t}$ si $x_p(t) = -1 - 3t - 2\sqrt{t} \in W_1$, solution particulière de (E_1).
(*Note : la méthode est équivalente si on considère* (E_1) *en forme normale,* $x' = x/\sqrt{t} + 3\sqrt{t} - 1 \rightsquigarrow \mathcal{O}_H = \mathrm{d}/\mathrm{d}\,t - 1/\sqrt{t}$)

$\star$) Conclusion : D'après les résultats du cours, on sait que toute solution de (E_1) peut s'exprimer comme la somme d'une solution de la partie homogène et une solution particulière, alors :

$$\boxed{x(t) = x_H(t) + x_p(t) = Ce^{2\sqrt{t}} - 1 - 3t - 2\sqrt{t}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

est la forme générale des solutions de (E_1).

⋆) Problème de valeur initiale : Si on impose la condition initiale,

$$-5 = x(1) = Ce^2 - 1 - 3 - 2 \Longleftrightarrow 1 = Ce^2 \Longleftrightarrow \boxed{C = e^{-2}}$$

Donc, on a la solution du PVI :

$$\boxed{x(t) = e^{2\sqrt{t}-2} - 1 - 3t - 2\sqrt{t}}$$

définie pour tout $t \in]0, +\infty[$.

c) On remarque que (E_2) est définie pour $t \in \mathbb{R}^*$.

⋆) Équation homogène associé :

$$t^2 x' = x$$

D'après (a), on sait que la forme générale des solutions de cet équation homogène est :

$$x_H(t) = Ce^{\frac{1}{1-2}t^{1-2}} = Ce^{-t^{-1}} = Ce^{-\frac{1}{t}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

définie sur $t \in \mathbb{R}$.

⋆) Solution particulière : Utilisons la méthode de la variation de constantes, on impose une solution particulière de la forme $x_p(t) = c(t)e^{-\frac{1}{t}}$. Si on substitue dans (E_2) :

$$\begin{aligned} t^2 x_P'(t) = x_p(t) + 2t\ln(t^2)e^{-1/t} &\Longleftrightarrow t^2\left(c'(t)e^{-\frac{1}{t}} - \frac{c(t)}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}\right) = c(t)e^{-\frac{1}{t}} + 2t\ln(t^2)e^{-1/t} \\ &\Longleftrightarrow t^2 c'(t)e^{-\frac{1}{t}} = 2t\ln(t^2)e^{-1/t} \\ &\Longleftrightarrow c'(t) = \frac{2\ln(t^2)}{t} \end{aligned}$$

On calcule une primitive :

$$c(t) = \int^t \frac{2\ln(s^2)}{s}\,\mathrm{d}\,s$$

On remarque que si $u = \ln(s^2)$, alors $u' = \frac{1}{s^2} \cdot (2s) = \frac{2}{s}$. Si on fait un changement de variables :

$$c(t) = \int^{\ln(t^2)} u\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{u^2}{2}\right]^{\ln(t^2)} = \frac{(\ln(t^2))^2}{2}$$

(On peut aussi trouver $c(t)$ si on fait intégration par parties, où $v' = \frac{2}{s} \to v = \ln(s^2)$).
D'où, la solution particulière de (E_2) :

$$x_P(t) = \frac{1}{2}(\ln(t^2))^2 e^{-\frac{1}{t}}$$

⋆) Conclusion : On exprime toute solution de (E_2) comme la somme d'une solution de la partie homogène et une solution particulière,

$$\boxed{x(t) = x_H(t) + x_p(t) = Ce^{-\frac{1}{t}} + \frac{1}{2}(\ln(t^2))^2 e^{-\frac{1}{t}}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

⋆) Problème de valeur initiale : Si on impose la condition initiale,

$$0 = x(1) = Ce^{-1} + 0 \Longleftrightarrow \boxed{C = 0}$$

Donc, on a la solution du PVI :

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}(\ln(t^2))^2 e^{-\frac{1}{t}}}$$

définie pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

Solution 2.

a) On remarque que (E_1) est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ (car $1+t^2>0, \forall t$), et qu'on peut utiliser la méthode des variables séparables :

$$x' = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \cdot x^3 \iff \int^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \int^t \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\,\mathrm{d}\,s + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Sur la seconde intégrale, on applique le changement de variables $u = 1+s^2$, $u' = 2s$, et on obtient

$$\frac{-1/2}{x(t)^2} = \int^{1+t^2} \frac{1/2}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u + C = \left[\sqrt{u}\right]^{1+t^2} + C$$

D'où, la solution générale en forme explicite de (E_1) est

$$\boxed{-\frac{1}{2x(t)^2} = \sqrt{1+t^2} + C}$$

Si on impose les condition initiales $x(0) = -1$:

$$-\frac{1}{2(-1)^2} = \sqrt{1+0} + C \iff \boxed{C = -\frac{3}{2}}$$

On cherche d'exprimer $x(t)$ de forme explicite :

$$-\frac{1}{2x(t)^2} = \sqrt{1+t^2} - \frac{3}{2} \iff x(t)^2 = \frac{1}{3-2\sqrt{1+t^2}} \iff x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+t^2}}}$$

On trouve deux branches de la courbe solution. Car on cherche une solution en vérifiant $x(0) = -1$, on prend la branche négative de la racine carré. D'où, la solution du problème de valeur initiale est

$$\boxed{x(t) = \frac{-1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+t^2}}}}$$

Quel est l'intervalle maximal de définition en contenant $t = 0$? On a vu que (E_1) est bien définie $\forall t \in \mathbb{R}$. Si on regarde la solution, on voit que $\sqrt{1+t^2}$ est bien définie $\forall t \in \mathbb{R}$, donc faut-il étudier la racine du dénominateur :

$$3 - 2\sqrt{1+t^2} > 0 \iff \frac{3}{2} > \sqrt{1+t^2}$$

Car $\phi(z) = z^2$ est croissante dans $z \in]0,+\infty[$, (et $\frac{3}{2}, \sqrt{1+t^2} > 0$), l'inégalité précédente est équivalente à

$$\frac{9}{4} > 1+t^2 \iff \frac{5}{4} > t^2 \iff \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{2} < t < \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Donc l'intervalle maximal de définition est $I = \left]-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right[$.

b) L'équation différentielle (E_2) est définie pour tout t tel que $\cos^2(t) \neq 0$, et pour $x(t) \geq 0$. On remarque que :

$$\mathbb{R} \setminus \{\cos^2(t) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

on peut utiliser la méthode des variables séparables :

$$x' = \left(\frac{e^{\tan(t)}}{\cos^2(t)}\right) \cdot (-\sqrt{x}) \iff -\int^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}} = \int^t \frac{e^{\tan(s)}}{\cos^2(s)}\,\mathrm{d}\,s + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Sur la seconde intégrale, on applique le changement de variables $u = \tan(s)$, $u' = \frac{1}{\cos^2(s)}$ (on peut le faire aussi par intégration par parties), et on obtient

$$-2\sqrt{x(t)} = \int^{\tan(t)} e^u \, \mathrm{d}\, u + C = [e^u]^{\tan(t)} + C$$

D'où, la solution générale en forme explicite de (E_2) est

$$\boxed{-2\sqrt{x(t)} = e^{\tan(t)} + C}$$

Si on impose les condition initiales $x(\pi) = 1$:

$$-2\sqrt{1} = e^{\tan(\pi)} + C \iff -2 = 1 + C \iff \boxed{C = -3}$$

On résout notre solution du problème de valeur initiale :

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{3 - e^{\tan(t)}}{2}\right)^2}$$

Quel est l'intervalle maximal de définition en contenant $t = \pi$? Notre solution vérifie $x(t) \geq 0$ et elle est définie dans

$$\mathbb{R} \setminus \{\cos^2(t) = 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

Le seul intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ contenant $t = \pi$ est $\boxed{I = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[}$.

Solution 3. Supposons que l'équation différentielle (E) admet une solution en séries entières de la forme $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Car (E) est un équation différentielle de second ordre, on calcule :

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1}, \qquad x''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

On impose que $x(t)$ vérifie (E) :

$$\begin{aligned} 0 = x''(t) + tx'(t) - x(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + t\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)\, a_n t^n \end{aligned}$$

On fait le changement d'indice $m = n - 2$ dans la première série :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=-2}^{+\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} t^m + \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)\, a_n t^n \\ &= \underset{(m=-2)}{0} + \underset{(m=-1)}{0} + \sum_{m=0}^{+\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} t^m + \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)\, a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-1)\, a_n\right] t^n \end{aligned}$$

Une série entière est nulle si et seulement si tout coefficient de chaque puissance de t est nul. D'où, les relations :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-1)\,a_n = 0 \Longleftrightarrow a_{n+2} = -\frac{n-1}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad \forall n \geq 0$$

Si on fait un changement d'indice $m = n+2$ pour obtenir la relation de récurrence sur a_m :

$$\boxed{a_m = -\frac{m-3}{m(m-1)}a_{m-2}} \quad \forall m \geq 2$$

On calcule les premiers termes de la récurrence :

$a_2 = \frac{1}{2}a_0$ $\quad a_5 = -\frac{1}{5\cdot 4}a_3 = 0$ $\quad a_8 = -\frac{5}{8\cdot 7}a_6 = (-1)^3\frac{5\cdot 3}{8!}a_0$

$a_3 = 0$ $\quad a_6 = -\frac{3}{6\cdot 5}a_4 = (-1)^2\frac{3}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_0$ $\quad a_9 = 0$

$a_4 = -\frac{1}{4\cdot 3}a_2 = -\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0$ $\quad a_7 = 0$ $\quad [\ldots]$

Étant données les coefficients a_0, a_1, on doit étudier les coefficients par parité car la relation de récurrence relie le coefficient a_n avec le a_{n-2} pour tout $n \in \mathbb{N}$. On remarque que la relation $a_2 = \frac{1}{2}a_0$ est la seule pour laquelle il n'y pas de facteur (-1) qui intervienne. Par cas :

$\star$) Si $n = 2p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ (si $n \equiv 0 \quad [2]$) :

$$\begin{aligned} a_{2p} &= -\frac{2p-3}{2p(2p-1)}a_{2(p-1)} = \left(-\frac{2p-3}{2p(2p-1)}\right)\cdot\left(-\frac{2p-5}{(2p-2)(2p-3)}\right)a_{2(p-2)} \\ &= \left(-\frac{2p-3}{2p(2p-1)}\right)\cdot\left(-\frac{2p-5}{(2p-2)(2p-3)}\right)\overset{p-1)}{\cdots}\left(-\frac{1}{4\cdot 3}\right)a_2 \\ &= (-1)^{p-1}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!}2a_2 = (-1)^{p-1}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!}a_0 \end{aligned}$$

(*On peut aussi prouver facilement ce formule par récurrence*)

$\star$) Si $n = 2p+1$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ (si $n \equiv 1 \quad [2]$) : On a vu que $a_3 = 0$ et les relations de récurrence nous dissent que

$$a_{2p+1} = f(n)a_3, \quad p \geq 1$$

pour une certaine fonction f. Alors, on peut conclure que $a_{2p+1} = 0$, pour tout $p \geq 1$.

Alors, la solution en série de puissances est de la forme :

$$\boxed{x(t) = a_0 + a_1 t + \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!}a_0 t^{2p}}$$

On va imposer les conditions initiales sur la série. Il est clair que :

$$x(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0, \qquad x'(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n 0^{n-1} = a_1$$

a) D'après l'analyse précédente, les conditions initiales sont équivalentes à imposer $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ dans les relations de récurrence. D'où :

$$\boxed{x(t) = t}$$

Cette série est du coup une fonction polynomiale, donc elle converge vers tout $t \in \mathbb{R}$.

b) On impose $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ dans ce cas. Alors la solution est de la forme :

$$\boxed{x(t) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{(2p-3)!!}{(2p)!} t^{2p}}$$

Quel est le rayon de convergence de cette série ? On va utiliser le Critère de d'Alembert pour les séries numériques. Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la série numérique définie par :

$$x_p = (-1)^{p-1} \frac{(2p-3)!!}{(2p)!} t^{2p}$$

On sait (d'après d'Alembert) que si $\lim_p \frac{|x_{p+1}|}{|x_p|} < 1$ alors $\sum_p x_p$ converge absolument. On va calculer la limite du quotient en fonction de t :

$$\lim_p \frac{|x_{p+1}|}{|x_p|} = \lim_p \left| \frac{(2p-1)!!\ (2p)!\ t^{2p+2}}{(2p+2)!\ (2p-3)!!\ t^{2p}} \right| = |t|^2 \lim_p \frac{(2p-1)}{(2p+2)(2p+1)}$$

Le degré du dénominateur est plus grand que ce du numérateur dans la fraction précédente :

$$\frac{(2p-1)}{(2p+2)(2p+1)} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{2p}{4p^2} = \frac{1}{2p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où :

$$\lim_p \frac{|x_{p+1}|}{|x_p|} = 0 < 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Donc la série converge sur tout $\mathbb{R}$ et le rayon de convergence est infinie.