Arithmétique

Contrôle continu blanc – Novembre 2014

Durée : 1h

Exercice 1. Soit la fonction

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\exp(\frac{1}{y}) \end{array}$$

i) Déterminer le domaine D_F.

ii) Considérer la restriction de F à son domaine $f = F_{|D_F} : D_F \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = F(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D_F$. Déterminer si f est injective, surjective et bijective.

iii) Déterminer les images directes et réciproques suivantes : $f(\{(1,\frac{1}{2})\})$, $f(\{(e,1)\})$, $f(]0,1] \times \{1\})$, $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 2. On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur les nombres réels par :

$$x, y \in \mathbb{R} : \ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \cos(x) = \cos(y)$$

i) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

ii) Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\overline{x}^{\mathcal{R}}$ la classe d'équivalence de x par $\mathcal{R}$. Donner trois éléments de chaque classe d'équivalence $\overline{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{R}}$, $\overline{\frac{-\pi}{2}}^{\mathcal{R}}$ et $\overline{\frac{5\pi}{2}}^{\mathcal{R}}$. En déduire que les trois classes d'équivalence sont égales.

iii) Soit la relation d'équivalence sur les réels donné par :

$$x, y \in \mathbb{R} : \ x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y \text{ et } \sin(x) = \sin(y)$$

Démontrer que les classes d'équivalence $\overline{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{S}}$ et $\overline{\frac{-\pi}{2}}^{\mathcal{S}}$ sont différentes, mais $\overline{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{S}}$ et $\overline{\frac{5\pi}{2}}^{\mathcal{S}}$ sont égales.

iv) Prouver que

$$x, y \in \mathbb{R} : \ x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow e^{ix} = e^{iy}.$$

En déduire la forme de la classe d'équivalence $\overline{x}^{\mathcal{S}}$ pour un $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 3. Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$. On définit la relation binaire $\mathcal{T}$ sur E d'après les relations suivantes :

$$1\mathcal{T}1;\ 1\mathcal{T}3;\ 2\mathcal{T}1;\ 2\mathcal{T}2;\ 2\mathcal{T}3;\ 3\mathcal{T}3$$

Est $\mathcal{T}$ une relation d'ordre ?

Arithmétique

Solutions détaillées

Solution 1.

i) On sait que l'exponentielle de n'importe lequel nombre réel est bien définie, ainsi comme la multiplication de deux réels. Par contre, l'expression $1/y$ dedans l'exponentielle n'est pas définie pour $y = 0$. Donc $D_F = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

ii) Soit la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = x \exp(\frac{1}{y}) \end{array}$$

- f est-elle injective ? : Fixons $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tels que $f(x, y) = f(x', y')$, est-ce que peut-on prouver que cette hypothèse implique $(x, y) = (x'y')$? On voit que :

$$f(x, y) = f(x', y') \Longleftrightarrow x \exp(1/y) = x' \exp(1/y')$$

  C'est mal tourné pour démontrer que $(x, y) = (x', y')$, car pour exemple si $x = \exp(1/y')$ et $y = x'$, l'équation précédente est vérifié et n'implique pas légalité des couples. Il semblera donc que cette fonction n'est pas injective, on va chercher un contre-exemple. Si on prend quelques valeurs de f dans son domaine :

$f(x, y)$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = e$
$y = 1$	$-e$	0	e	e^2
$y = -1$	$-1/e$	0	$1/e$	1
$y = 1/2$	$-e^2$	0	e^2	e^3

  On s'aperçoit de que $f(0, 1) = f(0, -1) = f(0, 1/2) = 0$! Du coup, il est facile à voir que $f(0, y) = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$. Donc f n'est pas injective.
  (Un autre contre-exemple aura pu être, pour exemple, $f(e, 1) = f(1, 1/2) = e^2$ à partir du tableau précédent)

- f est-elle surjective ? : Fixons un élément dans l'ensemble d'arrivée, $z \in \mathbb{R}$, est-ce qu'il existe un élément de l'ensemble de départ $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que z soit l'image de (x, y) par f, c'est-à-dire $z = f(x, y)$? Posons l'équation et essayons de trouver une solution (x, y) en fonction de z :

$$z = f(x, y) \Longleftrightarrow z = x \exp(1/y)$$

  Possible réflexion pour trouver une solution à partir de l'équation précédente :

  Pour exprimer $z \in \mathbb{R}$ en fonction de x et y, il y a deux facteurs dans l'équation, x et $\exp(1/y)$. On sait que la fonction exponentielle est en bijection avec les réels strictement positifs, donc elle n'intervient pas dans le signe de $x \exp(1/y)$, qui va dépendre complètement de x. Est-ce que peut-t-on fixer la valeur de $\exp(1/y)$ et résoudre par rapport à x ? On remarque qu'on ne peut pas prendre y tel que $\exp(1/y) = 1$!

  On choisit $y = 1$. Dans ce cas, l'équation se simplifié à $z = xe$, qui peut être très facilement résolue par $x = z/e$. Alors $z = (z/e) \cdot e^1 = f(z/e, 1)$, pour tout $z \in \mathbb{R}$. Donc on a trouvé des images précédents pour n'importe lequel $z \in \mathbb{R}$ et f est effectivement surjective.

- f est-elle bijective ? : Non, car f n'est pas injective.

iii) On se souvient de que, par définition

$$\begin{array}{rl} A \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* : & f(A) = \{z\in\mathbb{R} \mid \exists(x,y)\in A : z = f(x,y)\} = \{f(x,y) \mid (x,y)\in A\} \\ B\subset\mathbb{R} : & f^{-1}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \mid f(x,y)\in B\} \end{array}$$

Alors :

- $f(\{(1,1/2)\}) = \{f(x,y) \mid (x,y)\in\{(1,1/2)\}\} = \{f(1,1/2)\} = \{e^2\}$.
- $f(\{(e,1)\}) = \{f(x,y) \mid (x,y)\in\{(e,1)\}\} = \{f(e,1)\} = \{e^2\}$.
(Notez qu'on viens de démonter que f n'est pas injective, car $f(\{(1,1/2)\}) = \{e^2\} = f(\{(e,1)\})$)
- $f(]0,1]\times\{1\}) = \{f(x,y) \mid (x,y)\in]0,1]\times\{1\}\} = \{f(x,1) \mid x\in]0,1]\} = \{xe \mid x\in]0,1]\} =]0,e]$, car $0 < x \leq 1$ implique $0 < xe \leq e$ (les inégalités ne changent pas car on multiplie par $e > 0$).
- $f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \mid f(x,y)\in\{0\}\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \mid f(x,y) = 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \mid x\exp(1/y) = 0\}$. On sait que l'exponentielle est une fonction positive sur les nombres réels, alors $\exp(1/y) > 0, \forall y\in\mathbb{R}^*$. Or, la solution de $x\exp(1/y) = 0$ dépends que du valeur de x, dans ce cas $x = 0$. Donc, si $x = 0$ on a $f(0,y) = 0\cdot\exp(1/y) = 0, \forall y\in\mathbb{R}^*$. Alors $f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \mid x = 0 \text{ et } y\in\mathbb{R}^*\} = \{0\}\times\mathbb{R}^*$.

Solution 2.

i) Une relation binaire est une relation d'équivalence si elle vérifie les propriétés réflexive, symétrique et transitive.
(Réflexive) Fixons $x\in\mathbb{R}$. De façon triviale, on a $\cos(x) = \cos(x)$, alors $x\mathcal{R}x$.

(Symétrique) Soient $x, y\in\mathbb{R}$. Supposons que $x\mathcal{R}y$, par définition :

$$x\mathcal{R}y \iff \cos(x) = \cos(y) \iff \cos(y) = \cos(x) \iff y\mathcal{R}x.$$

Donc $y\mathcal{R}x$ et c'est symétrique.

(Transitive) Soient $x, y, z\in\mathbb{R}$. Supposons que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a :

$$\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \cos(x) = \cos(y) \\ \text{et} \\ \cos(y) = \cos(z) \end{array}\right. \iff \cos(x) = \cos(y) = \cos(z) \iff x\mathcal{R}z$$

D'où $y\mathcal{R}x$, transitive.

On a démontré, alors, que $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

ii) Par propriétés de la fonction cosinus, on sait que $\cos(x) = \cos(-x) = \cos(x + 2k\pi)$ pour $k\in\mathbb{Z}$. Alors, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ appartient les trois autant à $\overline{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{R}}$ comme à $\overline{\frac{-\pi}{2}}^{\mathcal{R}}$ et ils appartient aussi à $\overline{\frac{5\pi}{2}}^{\mathcal{R}}$. Donc $\frac{\pi}{2}\mathcal{R}\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{-\pi}{2}\mathcal{R}\frac{5\pi}{2}$ et ils sont des représentants de la même classe d'équivalence :

$$\overline{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{R}} = \overline{\frac{-\pi}{2}}^{\mathcal{R}} = \overline{\frac{5\pi}{2}}^{\mathcal{R}}$$

iii) À partir des propriétés de la fonction sinus, on sait $\sin(x) = -\sin(-x) = \sin(x + 2k\pi)$ pour $k\in\mathbb{Z}$. Facilement, on voit que $\sin(\pi/2) = 1$ et $\sin(-\pi/2) = -1$, donc $\frac{\pi}{2}\not\mathcal{S}\frac{-\pi}{2}$ et leurs classes

d'équivalence $\overline{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{S}}$ et $\overline{\frac{-\pi}{2}}^{\mathcal{S}}$ ne peuvent pas être égales.
De une autre coté, on a déjà vu que $\frac{\pi}{2}\mathcal{R}\frac{5\pi}{2}$ et comme $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$, on a aussi que $\sin(\pi/2) = \sin(5\pi/2)$, donc $\frac{\pi}{2}\mathcal{S}\frac{5\pi}{2}$ d'où on a l'égalité $\overline{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{S}} = \overline{\frac{5\pi}{2}}^{\mathcal{S}}$.

iv) Premièrement, on connaît par analyse complexe que l'exponentielle complexe se développe de la façon suivante

$$x \in \mathbb{R} : \ e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Alors, fixons $x, y \in \mathbb{R}$, comme cos et sin sont des fonctions réels définies sur des réels :

$$x\mathcal{S}y \iff \left\{ \begin{array}{c} \cos(x) = \cos(y) \\ \text{et} \\ \sin(x) = \sin(y) \end{array} \right. \iff \cos(x) + i\sin(x) = \cos(y) + i\sin(y) \iff e^{ix} = e^{iy}$$

On va décrire les classes d'équivalence $\overline{x}^{\mathcal{S}}$. Fixons $x \in \mathbb{R}$, d'après la caractérisation précédente dans la forme exponentielle complexe, on peut appliquer la propriété géométrique suivante :

$$x, y \in \mathbb{R} : \ e^{ix} = e^{iy} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y = x + 2k\pi$$

D'où on déduit que $\overline{x}^{\mathcal{S}} = \{y \in \mathbb{R} \mid x\mathcal{S}y\} = \{y \in \mathbb{R} \mid e^{ix} = e^{iy}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y = x + 2k\pi\} = \{x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Solution 3. Par définition, une relation binaire est une relation d'ordre si elle vérifie les propriétés réflexive, antisymétrique et transitive. Pour faire plus lisibles ces relations, d'après un petit moment de réflexion, on va les séparer en celles qui semblent réflexives et les autres :

$$1\mathcal{T}1;\ 2\mathcal{T}2;\ 3\mathcal{T}3 \quad ; \quad 1\mathcal{T}3;\ 2\mathcal{T}1;\ 2\mathcal{T}3$$

(Réflexive) Est-ce qu'on a $n\mathcal{T}n$ pour tout $n \in E$? Oui, car $1\mathcal{T}1$, $2\mathcal{T}2$, $3\mathcal{T}3$ sont des relations de $\mathcal{T}$, donc $\mathcal{T}$ est réflexive.

(Symétrique) Soient $n, m \in E$, est-ce que si $n\mathcal{T}m$ et $m\mathcal{T}n$, on a que $n = m$? On voit que les seuls relations de cette forme sont $1\mathcal{T}1$, $2\mathcal{T}2$, $3\mathcal{T}3$, qui vérifient cette condition de façon triviale. Alors $\mathcal{T}$ est antisymétrique.

(Transitive) Soient $n, m, l \in E$. Supposons que $n\mathcal{T}m$ et $m\mathcal{T}l$, est-ce que ça implique que $n\mathcal{T}l$? On va regarder élément par élément. C'est claire qu'il est inutile de regarder dans les relations réflexives :

- Pour $1\mathcal{T}3$, il n'y a pas une relation non réflexive où son élément à droite soit 3, donc ce cas se vérifie.
- Pour $2\mathcal{T}1$, on a aussi $1\mathcal{T}3$ et $2\mathcal{T}3$ comme relations de $\mathcal{T}$, alors la transitivité se vérifie ici.
- Finalement pour $2\mathcal{T}3$, on a déjà vu qu'il n'y a pas une relation non réflexive où son élément à droite soit 3, donc ce cas se vérifie.

Donc $\mathcal{T}$ est transitive et on a montré que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre sur E.