Arithmétique

Exercices complémentaires – Feuille 4

1 Groupes et sous-groupes

Exercice 1. Les lois de composition interne sur G indiquées ci-dessous définissent-elles une structure de groupe ? Dans un cas affirmatif, s'agit-il d'un groupe abélien.

a) $G =]-1,1[$ avec $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in G$.

b) $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ pour la multiplication usuelle.

c) $G = \mathbb{R}_+$ pour la multiplication usuelle.

d) $G = \{f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$ pour la loi de compositions des applications.

e) $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ muni de la loi $x * y = x + y + xy$, $\forall x, y \in G$.

f) $G = \{-1, 1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ pour la multiplication usuelle.

g) $G = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ d'ensemble composé par quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montrer que G muni de la loi de composition sur les fonctions est un groupe. Est-il abélien ?

Exercice 3. Soit $\triangle ABC$ un triangle équilatéral dans le plan réel, dont le centre d'équilibre est O.

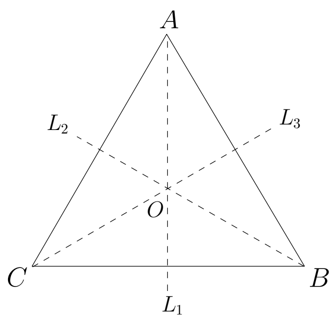
a) Soit $\mathcal{R} = \{\rho_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotation de α degrés et centre $O\}$. Vérifier que $(\mathcal{R}, \circ)$ muni de la loi de compositions entre applications est un groupe.

b) Déterminer $\mathcal{R}_{ABC}$, l'ensemble des rotations de centre O qui laissent invariant l'ensemble $\{A, B, C\}$.

c) Est-ce que $\mathcal{R}_{ABC}$ est un sous-groupe de $\mathcal{R}$ avec la loi de composition $\circ$?

d) Dresser la table de groupe de $\mathcal{R}_{ABC}$. Est-il un groupe abélien ?

e) Soient L_1, L_2, L_3 les trois médianes du triangle, et on considère $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ les *réflexions du plan euclidien* par rapport aux droites L_1, L_2, L_3. On définit $G = \mathcal{R}_{ABC} \cup \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.



On admit que $\circ$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{R}_{ABC}$. Construire la table d'opérations de $(G, \circ)$ et en déduire qu'il a une structure de groupe (appelé le *groupe diédral d'ordre* 6).

f) Est-ce que $(G, \circ)$ est-il un groupe abélien ? Déterminer les sous-groupes de $(G, \circ)$. Forment les réflexions $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ un sous-groupe de G ?

2 Arithmétique des entiers

Exercice 4. En utilisant des congruences :

a) Montrer que $34^{57} - 1$ est multiple de 11.

b) Trouver le reste de la division euclidienne de 2^2 et 2^{342} par 5.

c) Montrer que $9518^{42} - 4$ est divisible par 5.

Exercice 5. Montrer que, pour tout n entier impair, $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 6. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^2 + 4n + 7 \equiv 3 \quad [n + 2]$$

En déduire le reste r dans la division euclidienne de $n^2 + 4n + 7$ par $n + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. On va calculer les deux dernières chiffres du nombre 2^{1000}.

a) Calculer $2^{12} \equiv -2^2 \quad [100]$.

b) Montrer que $2^{20} \equiv -2^{10} \quad [100]$.

c) Soit $a = 2^{10}$, vérifier que $a^2 \equiv -a$ [100]. Montrer que $a^{2^n} \equiv -a$ [100], pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Exprimer $100 = \overline{100}^2$ en base 2. En déduire le résultat.

Exercice 8. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD de 57970 and 10353 et déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $57970u + 10353v = 34$.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de démontrer que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ est multiple de 7.

a) Calculer 2222 [7], 5555 [7], 2222 [6], 5555 [6].

b) Déterminer la suite des 3^n [7]. Quelle est sa période ?

c) En utilisant les résultats précédents,démontrer que $2222^{5555} \equiv 5$ [7], $5555^{2222} \equiv 2$ [7] et en déduire le résultat.

Exercice 10. Combien l'armée de Han Xing comporte-t-elle de soldats si, rangés par trois colonnes, il reste deux soldats, rangés par cinq colonnes, il reste trois soldats et, rangés par sept colonnes, il reste deux soldats ?

Exercice 11. Montrer que le PGCD de $2n + 4$ et $3n + 3$ ne peut être que $1, 2, 3$ ou 6.

Exercice 12. Est-ce que peut-on préparer un envoie postal de 2 euros et 11 centimes avec des timbres de 15 et 21 centimes ? Et avec des timbres de 2 et 13 centimes ? Donner les solutions, s'il en existent.

Exercice 13. Soient a et b des nombres premiers entre eux. Montrer que $a \wedge (a + b) = b \wedge (a + b) = 1$, puis $(a + b) \wedge ab = 1$.