Arithmétique

Exercices complémentaires – Feuille 3

Exercice 1. Dire si chacune des relations ci-dessous est réflexive, symétrique, ou transitive.

a) $x, y \in \mathbb{Q}: \; x\mathcal{R}y \iff xy \neq 0$.

b) $a, b \in \mathbb{Z}: \; a\mathcal{S}b \iff a - b$ est divisible par 2 ou par 3.

Exercice 2. Déterminer si les relations suivantes sont ou non des relations d'équivalence. Si elle le sont, décrire les classes d'équivalence :

a) $n, m \in \mathbb{Z} : n\mathcal{R}m \iff n + m$ est pair.

b) $x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \iff e^x = e^y$.

c) Les relations sur $\mathbb{C}$ définies par :

  (a) $z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1\mathcal{R}z_2 \iff |z_1| = |z_2|$.

  (b) $z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1\mathcal{S}z_2 \iff |z_1 - z_2| = 1$.

Exercice 3. Soit E un ensemble. Les relations définies ci-dessous sont-elles des relations d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$?

a) $A, B \in \mathcal{P}(E): \; A\mathcal{R}B \iff A \subset B$.

b) $A, B \in \mathcal{P}(E): \; A\mathcal{S}B \iff A \cap B \neq \emptyset$.

c) Posons $E = \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{P}(E): \; A\mathcal{T}B \iff A \cup [0, 1] = B \cup [0, 1]$.

Exercice 4. Soit E l'ensemble de droites contenues dans le plan afin réel $\mathbb{R}^2$. Pour chaque point $P \in \mathbb{R}^2$, on définit $\mathcal{F}_P = \{L \in E \mid P \in L\}$ le *faisceau de droites passant par* P. Est-ce que peut-il exister une certaine relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E tel que les faisceaux de droites $\{\mathcal{F}_P\}_{P\in\mathbb{R}^2}$ soient les classes d'équivalence ? Pour-quoi ?

Exercice 5. Déterminer si les relations suivantes sont ou non des relations d'ordre. Si elle le sont, dire s'il s'agit d'un ordre total :

a) Les relations sur $\mathbb{R}$ définies par :

  (a) $x, y \in \mathbb{R}: \; x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{N}$.

  (b) $x, y \in \mathbb{R}: \; x\mathcal{S}y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

b) Sur l'ensemble des vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$: $\vec{u}\mathcal{R}\vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

c) Sur même ensemble : $\vec{u}\mathcal{R}\vec{v} \iff \|\vec{u}\| \leq \|\vec{v}\|$.

d) La relation $z_1\mathcal{R}z_2 \iff \Re(z_1) \leq \Re(z_2)$, pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

e) L'ordre alphabétique sur les mots du dictionnaire.

f) La relation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{R}(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$, sur l'ensemble des suites réelles.

Exercice 6. Soient E un ensemble fini non vide et $x_0 \in E$ un élément fixé. Les relations définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$?

a) $A, B \in \mathcal{P}(E): \; A\mathcal{R}B \iff A \subset B$.

b) $A, B \in \mathcal{P}(E): \; A\mathcal{S}B \iff x_0 \in A \cap B^c$.

Exercice 7. On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur les complexes par :

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \ z_1 \mathcal{R} z_2 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2 \text{ ou } [\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ et } \operatorname{Im} z_1 \leq \operatorname{Im} z_2]$$

a) Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ (La transitivité sera supposé vraie). Est $\mathcal{R}$ une relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$?

b) Dessiner l'ensemble $X = \{z \in \mathbb{C} \mid 1\mathcal{R}z\}$.

c) Soient les ensembles $A = \{0, 1, i, 1-i, 3+i, 100i\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$. Déterminer les majorants et les minorants de A, B et $A \cap B$. Chaque un de ces ensembles, possèdent-il de plus grand élément ? et de plus petit élément ?

Exercice 8. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive définie sur un ensemble E.
On définit une relation $\mathcal{S}$ sur E par :

$$x, y \in E : \ x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre dure les classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.