Arithmétique

# Exercices complémentaires – Feuille 1

## 1 Logique et méthodes de démonstration

**Exercice 1.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$ à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

a) La fonction $f$ s'annule.
b) La fonction $f$ est la fonction nulle.
c) $f$ n'est pas une fonction constante.
d) $f$ ne prend jamais deux fois la même valeur.
e) La fonction $f$ présente un minimum.
f) $f$ prend des valeurs arbitrairement grandes.
g) $f$ ne peut s'annuler qu'une seule fois.

**Exercice 2.** Exprimer, en phrases et à l'aide de quantificateurs, les négations des assertions (a)–(g) de l'exercice précèdent.

**Exercice 3.** Nier les propositions suivantes :

a) "Tout triangle rectangle possède un angle droit".
b) "Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".
c) "Tous les étudiants qui portent une casquette pendant le cours rateront l'examen final avec une note maximale de 9,5/20".
d) Pour tout entier $x$, il existe un entier $y$ tel que, pour tout entier $z$, la relation $z < x$ implique la relation $z < x + 1$.

**Exercice 4 (Le missionnaire et les cannibales, d'après Cervantès).** Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ?

**Exercice 5.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur $I$.
Exprimer les négations des assertions suivantes :

a) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$.
c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$.
d) $\forall x, y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
f) $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

**Exercice 6.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner la différence de sens des deux assertions proposées et donner des exemples de chacune d'elles, si possible :

a) $[\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)]$ et $[\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)]$.
b) $[\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)]$ et $[\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)]$.
c) $[\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M]$ et $[\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M]$.

**Exercice 7.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon \Longrightarrow a = 0.$$

**Exercice 8.** Soit $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des nombres rationnels :

a) Montrer que la somme de deux nombres rationnels est aussi un nombre rationnel.

b) Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer par l'absurde que

$$\forall x \in \mathbb{Q} : \; x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

## 2 Manipulation des ensembles

**Exercice 9.** Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

a) $a \in E$

b) $a \subset E$

c) $\{a\} \subset E$

d) $\emptyset \in E$

e) $\emptyset \subset E$

f) $\{\emptyset\} \subset E$ ?

**Exercice 10.** Étant donné $A$, $B$ et $C$ trois parties de $E$, justifier les équivalences suivantes :

a) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

b) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

c) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

**Exercice 11.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$, on appelle différence symétrique de $A$ et $B$, l'ensemble

$$A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

a) Donner l'idée intuitive de $A \Delta B$ en utilisant *diagrammes de Venn.*

b) Montrer $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

**Exercice 12.** Etant donné $A$, $B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$, montrer que :

a) $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.

b) $A \backslash B = A \Leftrightarrow B \backslash A = B$.

c) $A \Delta B = A \cap B \Rightarrow A = B = \emptyset$.

**Exercice 13.** Soient les ensembles $\mathcal{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{I} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ formés par des entiers pairs et impairs, respectivement. Prouver que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

**Exercice 14.** Montrer les égalités des ensembles suivantes :

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y, x + y + z = 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t \in \mathbb{R}, x = t/2, y = t/2, z = 1 - t\}$.

**Exercice 15.** On définit les ensembles $A_k = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

a) Vérifier que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_k \supseteq A_{k+1} \supseteq \ldots$.

b) En déduire que $\bigcap_{m=0}^{k} A_m = A_k \neq \emptyset$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Par contre, montrer que $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m = \emptyset$.