Algèbre Linéaire II

Exercices complémentaires – Feuille 3

"x secondes de réflexion peuvent éviter x minutes de calculs (pour x >0)."
– Sage proverbe mathématicien –

Exercice 1. Calculer les déterminants d'ordre 2 suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

Exercice 2. Calculer les déterminants des matrices suivantes par développement par lignes ou colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit A une matrice réelle carrée.

1. Donner une formule pour $\det(A^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de $\det(A)$.
2. Si A est une matrice nilpotente, quelle est la valeur de $\det(A)$?
3. Supposons que $\det(A) = -1$. Si le déterminant de $2A$ est -8, quel est l'ordre de A ?

Exercice 4. En utilisant uniquement des sommes et différences de lignes, vérifier que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 5. Calculer les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Exercice 6. Calculer les déterminants suivants par développement de lignes et colonnes :

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 6 & 9 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 7. Calculer la valeur du déterminant suivant pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$$

Exercice 8. Calculer, si possible, la matrice inverse des matrices suivantes par la méthode de la comatrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. En utilisant la méthode de la comatrice, calculer, si possible, la matrice inverse de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Soient les matrices réelles $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:

1. Est-il vrai que $\det(AB) = \det(BA)$?
2. Calculer, si possible, l'inverse de AB par la méthode de la comatrice.

Exercice 11. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sin(x) & -\cos(x) & 0 \\ \cos(x) & \sin(x) & 0 \\ \sin(x)+\cos(x) & \sin(x)-\cos(x) & 1 \end{pmatrix}$$

Quelles sont les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que A est une matrice inversible ? Calculer l'inverse lorsque cela est possible.

Exercice 12. Soient les matrices réelles $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $C = B + mA$ n'est pas inversible.