Topologie et Calcul Différentiel

Exercices complémentaires – Feuille 4

Différentielles et dérivées partielles

Exercice 1. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrés réelles de dimension n. Soient les fonctions :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(M^3) \end{array}$$

Justifier que f et g sont différentiables et déterminer les différentielle de f et g en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (*Indication* : Utiliser les développements limité à l'ordre 1).

Exercice 2. Soit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ inversible}\}$ et la fonction $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donné par $\varphi(M) = M^{-1}$.

(a) Justifier que φ est différentiable dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(b) Pour $H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $H \to O_n$, monter que $(I_n + H)(I_n - H) = I_n + o(H)$. Qu'est-ce qu'on peut dire du développement limité à l'ordre 1 de $(I_n + H)^{-1}$?

(c) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Utiliser le résultat obtenu dans (b) pour calculer le développement limité à l'ordre 1 de $(M + H)^{-1}$ pour $H \to O_n$.

(d) Déterminer la différentielle en I_n puis en $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (*Indication* : Utiliser les développements limité à l'ordre 1 précédents).

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2)$$

i) Est-il possible de prolonger f par continuité en $(0,0)$?

ii) Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et, sans calculs, montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

iii) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g, h : U \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in U$$

On suppose de f et h sont différentiables en $a \in U$ et $f(a) = h(a)$.

i) Montrer que $\partial_\xi f(a) = \partial_\xi h(a)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. En déduire que les formes linéaires $f'(a)$ et $h'(a)$ sont égales.

ii) On pose $f'(a) = h'(a) = \ell$. Montrer que g est différentiable en a et $g'(a) = \ell$.

Exercice 5. Soit $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_k : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x+y)^k \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(a) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que f_k se prolonge par continuité en $(0,0)$?

(b) Si la condition de (a) est remplie, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0,0)$?

Exercice 6. Soit $f : E \to F$ différentiable vérifiant $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$. Montrer que l'application f est linéaire. (*Indication* : Utiliser le développement limité à l'ordre 1 de f)

Exercice 7. On définit une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x,y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y}$$

i) Montrer que φ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}^2$ noté $\overline{\varphi}$.

ii) Montrer que $\overline{\varphi}$ est $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 8. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}$$

i) Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$. On prolonge F par continuité en $(0,0)$ et on suppose de surcroît f de classe $\mathcal{C}^2$.

ii) Justifier que F est différentiable en $(0,0)$ et y préciser sa différentielle.

iii) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

La fonction f admet-elle un prolongement continue à $\mathbb{R}^2$? Un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que f est *homogène de degré* $k \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

i) **Case** $n = 2$: Vérifier que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable est homogène de degré k si, et seulement si,

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = k \cdot f$$

ii) **Cas général** : Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable est homogène de degré k si, et seulement si,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = k \cdot f$$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable vérifiant

$$f(x,y) = f(y,x), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Quelle relation existe-t-il entre les dérivées partielles de f ?

Équations en dérivées partielles

Exercice 12. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(D_f, \mathbb{R})$ avec $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ telles qu'elles vérifient

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-y}{(x+y+1)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2+x}{(x+y+1)^2} \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2} \end{array} \right.$$

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Exercice 14. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ les équations aux dérivées partielles

i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, en effectuant le changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{array} \right.$.

ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$, en effectuant le changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \end{array} \right.$.

Exercice 15. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$, en effectuant le changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \end{array} \right.$.

ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, en effectuant le changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v = x + y \end{array} \right.$.

iii) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, en effectuant le changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} u = xy \\ v = x/y \end{array} \right.$.

Calcul d'extrema

Exercice 16. Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

i) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$

ii) $f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$

iii) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$

iv) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)$

Exercice 17. Trouver les extrema locaux et absolus des fonction suivantes :

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ définie sur $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \leq 0, x + y \geq -3\}$

(b) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$ définie sur $\Omega = \{x, y > 0\}$.

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{2} - y^2$ sur $A = \{0 \leq x < y\}$ et sur le $\overline{B}(\bar{0}; 1)$.

(d) $f(x, y) = e^{-x-2y} - e^{-2x-y}$ sur $\Omega = \{x, y > 0\}$.

(e) $f(x, y) = e^x + e^y$ sur le disque $\overline{B}(\bar{0}; 1)$.

(f) $f(x, y) = x + y + z + x^2 + y^2 + z^2$ sur le cube délimité par les planes $x = 0, x = -2, y = 0, y = -2, z = 0, z = -2$.

(g) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-3x+y}$ sur :

   (i) $B(\bar{0}; 1)$ et $\overline{B}(\bar{0}; 1)$.

   (ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, 3x - y \geq 0\}$.

(h) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.