Topologie et Calcul Différentiel

Exercices complémentaires – Feuille 1

1 Rappel : Ensembles et applications

Exercice 1. Soient $f : X \to Y$ une application et $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$. Prouver :

i) Si $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$; et si $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

ii) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

iii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ mais $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Exercice 2. Soient $f : X \to Y$ une application et $A \subseteq X$, $C \subseteq Y$:

i) Démontrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Donner un exemple pour lequel les contenues des relations précédentes sont strictes.

ii) Prouver que $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ et donner un exemple qui montre que, en général, on a $f(X \setminus A) \neq Y \setminus f(A)$.

Exercice 3. Soit $f : X \to Y$ une application. Prouver que les affirmation suivantes sont équivalentes :

i) f est injective.

ii) $\forall y \in Y : f^{-1}(y)$ est ou bien l'ensemble vide ou bien un singleton.

iii) $\forall A \subseteq X : f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$.

iv) $\forall A \subseteq X : A = f^{-1}(f(A))$.

Exercice 4. Soit $f : X \to Y$ une application. Prouver que les affirmation suivantes sont équivalentes :

i) f est surjective.

ii) $\forall y \in Y : f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

iii) $\forall A \subseteq X : f(X \setminus A) \supseteq Y \setminus f(A)$.

iv) $\forall C \subseteq Y : f(f^{-1}(C)) = C$.

Exercice 5. Soit $f : X \to Y$ une application. Démontrer :

i) f est injective ssi il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = 1_X$.

ii) f est surjective ssi il existe $h : Y \to X$ telle que $f \circ h = 1_Y$.

iii) f est bijective ssi il existe $f^{-1} : Y \to X$ telle que $f^{-1} \circ f = 1_X$ et $f \circ f^{-1} = 1_Y$.

Exercice 6. Déterminer qui sont les ensembles suivantes :

i) $A = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid \forall m \in \mathbb{Z}^+ \text{ t.q. } 1 < m < n : m \nmid n\}$.

ii) $B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{A_\lambda\}$ où $A_\lambda = \{\lambda\}$.

iii) $C = \{2r \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{C}$ une collection de sous-ensembles, on définit les ensembles

$$\cap\mathcal{C} = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \qquad \cup\,\mathcal{C} = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A.$$

Calculer $\cap\mathcal{C}$ et $\cup\mathcal{C}$ pour les collections suivantes :

i) $\mathcal{C} = \{[-n, n] \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.

ii) $\mathcal{C} = \{]-n, n[\mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.

iii) $\mathcal{C} = \{[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.

iv) $\mathcal{C} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Q}, a < 0, b > 0\}$.

v) $\mathcal{C} = \{[r, +\infty[\mid r \in \mathbb{R}\}$.

2 Normes et boules

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E. On note $B_1 = \{x \in E \mid N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E \mid N_2(x) \leq 1\}$. Montrer

$$B_1 = B_2 \Longleftrightarrow N_1 = N_2$$

Exercice 9. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Considérons $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et soit $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$N(x_1, \ldots, x_n) = a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|$$

A quelle condition sur les $a_1, \ldots, a_n$ l'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

Exercice 10. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, x_2) = \sup_{t \in [0,1]} |x_1 + tx_2|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représenter la boule unité fermée pour cette norme comparer celle-ci à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 11. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et l'application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, \ldots, x_n) = \|x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n\|_\infty$$

Á quelle condition N définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

3 Introduction aux voisinages et ouverts

Dans la suite, on considère tous les espaces normées munis de la respective norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ ou d'une autre équivalente.

Exercice 12. Montrer et justifier si les affirmations suivantes relatives aux voisinages des points donnés sont vraies ou fausses :

i) $\mathbb{Q}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.
ii) $U = \overline{B}(-1; 1) \cup \overline{B}(1; 1)$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.
iii) $U = \overline{B}((-1, 0); 1) \cup \overline{B}((1, 0); 1)$ est un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$.
iv) Soit $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alors $U = \mathbb{R} \setminus A$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit $\{U_\lambda^x\}_{\lambda \in \Lambda}$ une collection de voisinages de $x \in \mathbb{R}$. Démontrer :

i) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^x$ est un voisinage de x.
ii) Si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda$ alors $\bigcap_{i=1}^n U_{\lambda_i}^x$ est un voisinage de x.
iii) Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ alors $U_\lambda^x \cup A$ est aussi un voisinage de x. Si $x \in A$, est-ce que $U_\lambda^x \cap A$ est-il un voisinage de x ?

Exercice 14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que les semi-planes définis sous la forme $\{(x, y) \mid x < a\}$, $\{(x, y) \mid x > a\}$, $\{(x, y) \mid y < b\}$, $\{(x, y) \mid y > b\}$ sont ouverts dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15. Répondre de façon suffisamment justifié aux questions suivantes à propos de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$:

i) Si $D = \overline{B}(x, \varepsilon)$ est une boule fermée, est-ce que $B = \mathbb{R}^n \setminus D$ est-il un ouvert ?
ii) Si $U = B(x, \varepsilon)$ est une boule ouverte, est-ce que U est-il un ouvert ?
iii) Est-ce que $A = \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ est-il un ouvert ?
iv) Si $C = \{x_1, \ldots, x_k\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$, est-ce que $C = \mathbb{R}^n \setminus C$ est-il un ouvert ?